GEOMETRIA
PRIMERA PARTE

GEOMETRIA

PROF. OMER CANO

I n d i c e

PROLOGO

A petición de varios colegas, y para utilidad de profesores y alumnos, sale a luz la 3.ª edición del texto de Geometría 2.º Ciclo.

Las materias de los tres últimos cursos se han reunido en un solo tomo: 1.º para facilitar consultas y repasos, dada la conexión que existe entre ellas; 2.º para mayor economía del tiempo y del dinero del lector.

Substancialmente es la misma materia total que en la edición anterior, pero se presenta más didáctica, más clara y metódica, mejor dispuesta y ordenada.

Se comienza por el capítulo de la circunferencia por ser más sencillo y de mayor interés para los alumnos.

Se hace especial hincapié en el enunciado y desarrollo de los lugares geométricos, por ser materia fundamental y clave en la resolución de numerosos problemas.

Para varios teoremas se dan diversas demostraciones. Los señores profesores y alumnos sabrán elegir las que sean de su agrado.

Cada capítulo va seguido de numerosos ejercicios y problemas de aplicación cuidadosamente seleccionados. No es necesario resolverlos todos... Su elección queda al criterio del profesor y a la estudiosidad del alumno.

El presente texto, además de asegurar el acierto en sus exámenes finales a los alumnos estudiosos y aplicados que se sirvan de él, será también un precioso auxiliar para los que se preparan a dar el bachillerato en Matemáticas.

A tal efecto, además de los numerosos ejercicios diseminados en el texto, se insertan al final de cada curso unos 150 problemas entresacados de los propuestos en los exámenes de bachillerato en diversas ciudades y distintos años.

Al final del texto, se ponen a manera de ejemplos numerosas pruebas referentes a cada cédula del Bachillerato, todas ellas propuestas en los exámenes oficiales.

La experiencia indica que el alumno que piensa rendir el Bachillerato en Matemáticas, debe pensar en prepararse ya desde el cuarto Año.

Pues bien, los estudiantes de 4.º, 5.º y 6.º años, encontrarán al final de su respectiva materia numerosos problemas de bachillerato, basados en la misma, para ejercitarse provechosamente.

Agradecimiento muy especial a cuantos colaboraron en una u otra forma, muy particularmente a mi querido amigo R. H. Ruperto Vargas B., que con gran arte y abnegación ejecutó los dibujos de los clisés.

Ruego a los señores profesores del ramo, se sirvan enviarme sus observaciones y sugerencias encaminadas a subsanar las deficiencias que se hayan deslizado en el presente texto, con el fin de irlo mejorando en una próxima edición.

Omer Cano

ADVERTENCIA A LA 4.a EDICION

Con relación a la anterior, la presente edición no ha variado mucho.

La materia referente al 4.o Año, salvo algunos pocos problemas de aplicación que fueron reemplazados por otros que ofrecían mayor interés, no ha sido modificada.

En la parte correspondiente al 5.o Año, se introdujeron algunas nociones sobre los vectores y se dio mayor extensión a la "Homotecia", por exigirlo así los nuevos programas.

En la parte del 6.o Año, se estimó que el "Principio de Cavalieri", iría mejor antes del Capítulo que trata del Volumen de los sólidos, en vez de figurar al final de dicho Capítulo. Además, se agregaron varios nuevos problemas de aplicación. Como apéndice de la Geometría del Espacio, se añadió un corto capítulo expresamente indicado en el nuevo programa: "Traslación; simetría, homotecia", que no figuraba en las ediciones anteriores.

Al final del texto se insertan las pruebas de bachillerato de la "Universidad de Chile", de la "Universidad Católica de Valparaíso, de los últimos años hasta 1965, inclusive y algunas pruebas del examen de admisión a la Universidad Técnica "Federico Santa María".

Una vez más vayan nuestros agradecimientos a los señores profesores y alumnos por el favor siempre creciente dispensado a nuestro texto y también a los que, en una u otra forma, nos han hecho llegar su palabra de aliento.

Aceptamos con mucho agrado cualquiera observación o crítica constructiva, que contribuya a mejorar la obra.

Valparaíso, 15 de Noviembre de 1965.

SIGNOS USADOS EN GEOMETRIA

Signos de operaciones:

$a+b$	se enuncia	**a más b.**
$c-d$	se enuncia	**c menos d.**
$e\times f$, o, $e \cdot f$	se enuncia	**e multiplicado por f.**
$g : h$, o $\frac{g}{h}$	se enuncia	**g dividido por h o g partido por h.**

Signos de relaciones:

$\gamma \equiv \gamma$	se enuncia	**γ idéntico a γ**
$a=b$	se enuncia	**a igual b.**

$c<d$	se enuncia	**c menor que d.**
$e>f$	se enuncia	**e mayor que f.**
$h \neq g$	se enuncia	**h desigual o diferente a g.**
$ABC \sim QHG$	se enuncia	**ABC semejante a QHG.**
$ABC \cong DEF$	se enuncia	**ABC congruente con DEF.**
$AB \perp CD$	se enuncia	**AB perpendicular a CD.**
$MN \parallel OP$	se enuncia	**MN paralela a OP.**
∞	léase	**infinito.**

Otros símbolos que se usarán en el texto:

$\therefore$	léase	**por consiguiente, luego.**
$\sphericalangle$	significa	**ángulo.**
$\triangle$	significa	**triángulo.**
#	léase	**igual y paralela o paralelógramo.**
$\odot$	léase	**circunferencia o círculo.**
$\odot$ (A, c)	léase	**circunferencia de centro A y radio c.**
$\square$	significa	**cuadrado.**
▭	significa	**rectángulo.**
$A(\leftrightarrow)B$	léase	**se une A con B.**
$AE \rightarrow$ de D	léase	**AE se prolonga más allá de D.**
arc. AB	léase	**arco AB.**
$A=f(r)$	léase	**A es función de r o A depende de r.**

ALFABETO GRIEGO

Mayuscola	Minúscola	Nombre
Α	α	alfa
Β	β	beta
Γ	γ	gama
Δ	δ	delta
Ε	ε	epsilon
Ζ	ζ	dseta
Η	η	eta
Θ	ϑ, θ	theta
Ι	ι	iota
Κ	ϰ	kapa
Λ	λ	lambda
Μ	μ	mi
Ν	ν	ni
Ξ	ξ	ksi
Ο	ο	ómicron
Π	π	pi
Ρ	ϱ	ro
Σ	σ, ς	sigma
Τ	τ	táu
Υ	υ	ipsilon
Φ	φ	fi
Χ	χ	ji
Ψ	ψ	psi
Ω	ω	omega

CAPITULO I

LA CIRCUNFERENCIA — EL CIRCULO

§ 1.—REPASO DE ALGUNAS NOCIONES ESTUDIADAS EN CURSOS ANTERIORES.

Circunferencia es una línea curva, plana y cerrada, cuyos puntos equidistan de un punto interior llamado centro. Fig. 1.

Círculo es la superficie o parte del plano encerrada por la circunferencia. Fig. 1

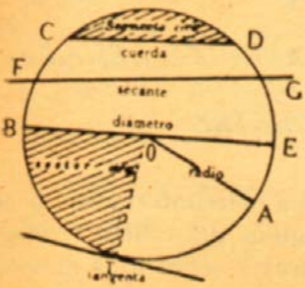


Fig. 1

Radio **es el trazo que une** el centro de la $\odot$ con un punto cualquiera de ella. Se designa por **r**. Ej.: **OA**, en Fig. 1.

Arco de una $\odot$ es cualquiera parte de ella. **Ej.:** arco **BT,** en Fig. 1.

Cuerda es el trazo que une dos puntos cualesquiera de una circunferencia. Ej.: **CD**, en Fig. 1.

Secante es una cuerda prolongada. **Ej.: FG,** en Fig. 1.

Sagita o flecha de un arco es la $\perp$ media de una cuerda que divide en dos partes iguales al arco comprendido entre los extremos de dicha cuerda. Ej.: DE en Fig. 3.

El trazo que une dos puntos de la circunferencia pasando por el centro, es el *diámetro.*

El diámetro es la cuerda máxima de una circunferencia y equivale a *dos radios* (**d=2r**).

El ángulo formado por dos radios y cuyo vértice está en el centro de la circunferencia, se llama *ángulo del centro o central.* ∢**AOT**, Fig. 1.

La parte del círculo comprendida entre dos radios y el arco que une los extremos de estos radios, se designa *sector circular.* (Fig. 1).

La parte del círculo comprendida entre una cuerda y el arco correspondiente, se designa *segmento circular.* (Fig. 1).

§ 2.—PROPIEDADES DE LOS ANGULOS DEL CENTRO, DE LAS CUERDAS, DE LOS ARCOS Y DE LAS TANGENTES

TEOREMA I.—**En una misma circunferencia o en circunferencias congruentes, a ángulos del centro iguales, corresponden arcos, cuerdas, sectores y segmentos iguales.**

Hip.) $\alpha=\beta$ (Fig. 2)

Tes.)
- arc. **AB**=arc. **CD**.
- cuerda **AB**=cuerda **CD**.
- sect. **AOB**=sect. **COD**.
- segm. **ASB**=segm. **CRD**.

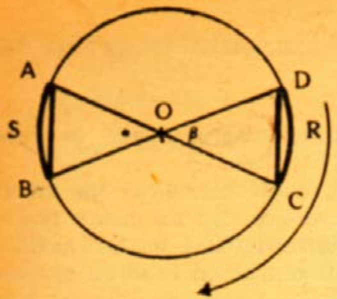


Fig. 2

Dem.) Se hace girar el ángulo β en torno del centro O (en el sentido de la flecha) hasta que el lado **OC** coincida con **OA**. Entonces β coincidirá con su igual α.

Como el punto **C** coincide con **A** y **D** con **B**, y entre dos puntos no se puede trazar más que una recta, la cuerda **DC** coincide con **AB**. También coinciden los arcos, sectores y segmentos. Luego: la tesis.

El teorema I admite cuatro proposiciones o teoremas recíprocos.

Por ej., al referirlo a una cuerda dirá:

En una misma ⊙ o en ⊙s congruentes, a cuerdas iguales, corresponden ángulos del centro, arcos, sectores y segmentos iguales.

Demostración por giro, como en problema I.
Formular los demás teoremas recíprocos.

Siempre que se hable de ángulos del centro menores que un ángulo extendido, resulta exacto el corolario siguiente y sus recíprocos.

COROLARIO.—*En una misma ⊙ o en ⊙s congruentes a mayor ángulo del centro corresponde mayor arco, mayor cuerda, mayor sector y mayor segmento.*

Este resultado o deducción se suele expresar en Matemáticas diciendo que, el arco, la cuerda, el sector y el segmento, son *funciones* del ángulo del centro.

Formúlense las demás proposiciones recíprocas del corolario anterior.

OBSERVACIONES.—De lo expuesto anteriormente, se desprende que:

a) Para comparar dos ángulos, basta comparar sus arcos correspondientes descritos desde el vértice, con un mismo radio.

b) Para dividir un ángulo en partes iguales, bastará dividir en partes iguales el arco de circunf. comprendido entre sus lados, descrito desde el vértice y unir los puntos de división con el mismo vértice.

TEOREMA II.—**La $\perp$ bajada desde el centro de una $\odot$ a una cuerda:**

1º. es simetral de la cuerda;

2º. es bisectriz del $\sphericalangle$ del centro que tiene por arco correspondiente el arco subtendido por la cuerda.

3º. Dimidia los dos arcos subtendidos por la cuerda.

Hip.) $OD \perp AB$

Tes.)
- 1.º $DA = DB$
- 2.º $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 2$
- 3º arc. **AE** = arc. **EB** y arc. **AC** = arc. **CB**

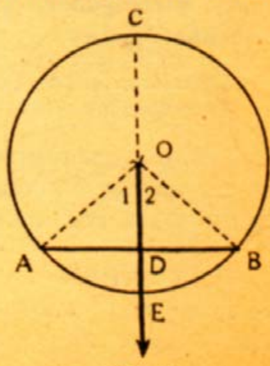


Fig. 3

Dem.) Sea la cuerda AB. Fig. 3

$$A (\leftrightarrow) O (\leftrightarrow) B.$$

Como $\triangle$**ABO** es isósceles, las tesis 1.ª y 2.ª, se demuestran directamente aplicando los teoremas sobre el $\triangle$ isósceles estudiados en 3.er año. (Ver Omer Cano, Tomo II. Teor. 23, 24, 25 y 26).

Siendo $\measuredangle 1 = \measuredangle 2$, arc. **AE**=arc. **EB** (Teor. 1).

Demostrar que el arc. AC=arc. BC (Fig. 3).

COROLARIO.—*En una ⊙ la simetral de cualquier cuerda pasa por centro.*

Del corolario del teorema II se deduce la solución para determinar el centro de una ⊙ o de un arco de circunferencia, y el método para construir la ⊙ que pasa por tres puntos dados.

PROBLEMA FUNDAMENTAL.—1.—Construir la ⊙ que pasa por tres puntos dados, **A, B** *y* **C**, *que no están en línea recta.*

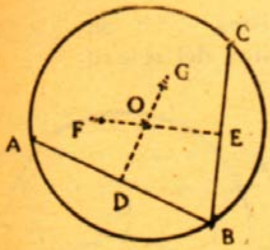


Fig. 4

Solución.— 1.º Se traza la simetral **DG** de **A** y **B** (Fig. 4).

2.º Se traza la simetral **EF** de **B** y **C**.

Estas simetrales concurren en **O**. (Ejerc. 12 de Omer Cano, Tomo II).

O es el único centro de la ⊙ pedida.

Discutir el problema y definir la ⊙ para los casos en que:

1.º Los puntos están en línea recta;

2.º Dos de los puntos coinciden;

3.º Los tres puntos coinciden.

COROLARIOS: *a) Por tres puntos no situados en línea recta puede pasar una circunferencia y sólo una;*

b) Dos circunferencias no pueden cortarse en más de dos puntos.

c) Una recta y una circunferencia no pueden tener más de dos puntos comunes, salvo el caso en que coincidan, es decir, si $r = \infty$.

§ 3.—RELACION ENTRE LAS CUERDAS Y SUS DISTANCIAS AL CENTRO.

a) Las cuerdas son iguales

TEOREMA III.—**En una misma $\odot$ o en $\odot$s. congruentes, cuerdas iguales equidistan del centro.**

Hip.) $AB = CD$.
Tes.) $OM = ON$.

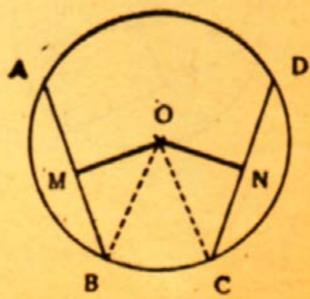


Fig. 5

Dem.) **$B (\leftrightarrow) O (\leftrightarrow) C$.**

Resulta $\triangle$**OMB**$\cong\triangle$**ONC.**

por tener:

$OB = OC$ (=radio)
$MB = NC$ (M y N puntos medios de AB y CD).
$\sphericalangle OMB = \sphericalangle ONC = 90°$
$\therefore$ **$OM = ON$**

2ª Demostración del Teorema III

Si es necesario se traslada una de las cuerdas hasta que ambas tengan el extremo común **B**.

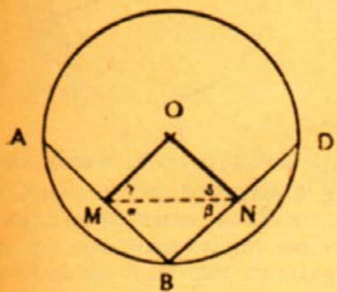


Fig. 6

M(→)N Fig. 6
MB=NB (mitades de cuerdas iguales)
∴ △MBN isósceles
∴ $\alpha=\beta$ (ángulos basales △ isósc.)
y $\gamma=\delta$ (Por tener complementos iguales)
∴ △**MNO** isósc.
Luego: **OM=ON** (Q. E. D.)

b) Las cuerdas son desiguales

TEOREMA IV.— **En una misma circunferencia o en circunferencias congruentes, de dos cuerdas desiguales, la mayor dista menos del centro.**

Hip.) CD>AB
Tes.) OF<OI

Dem.) Se traza CE=AB
Resulta OG=OI (Teor. III)
En △ rect. HFO:
OF<OH (En un △ a mayor ∢ se opone mayor lado).
A fortiori: OF<OG
Luego: **OF<OI** (Q. E. D.)

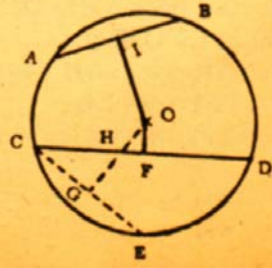


Fig. 7

2ª Demostración del Teorema IV.—

Hip.) $\overline{AB} > \overline{BC}$ (Fig. 8).
Tes.) $OE < OD$

Dem.) $E(\leftrightarrow)D$ (puntos medios)
Resulta: $EB > BD$ (mitades de cuerdas desiguales)
$\therefore$ $\beta > \alpha$ (En 1 $\triangle$ a mayor lado se opone mayor ángulo).
$\delta < \gamma$ (Complementos desiguales).

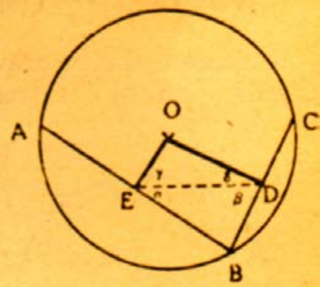


Fig. 8

Luego: **$OE < OD$** (En 1 $\triangle$ a menor ángulo se opone menor lado)

NOTA.—Se puede observar que la magnitud de una cuerda de una circunferencia depende de su distancia al centro. Si ésta crece, pasando por todos los valores entre sus límites extremos, de cero a r, la cuerda decrece pasando por todos los valores, desde su máximo valor, 2r (1 diámetro), a su valor mínimo, cero, el cual es un simple punto.

TEOREMA V.—**En una misma circunferencia, los arcos comprendidos entre paralelas son iguales.**

Hip.) $AB \parallel DE$
Tes.) arc. **AD** = arc. **BE**

Dem.) Se hace: $OH \perp AB$
Resulta: $OC \perp DE$ y
arc. **AH** = arc. **BH** (Teor. II)
arc. **AH** = arc. **EH**
Restando miembro a miembro:
arc. **AH** — arc. **DH** = arc. **BH** — arc. **EH**
Luego: arc. **AD** = arc. **BE**

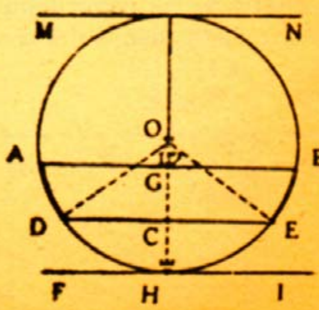


Fig. 9

OBSERVACION.—Demostrar el Teorema V en el caso en que **AB** || **FI** (una secante y otra tangente) y en el caso en que **MN** || **FI** (las dos ||s. son tangentes). **Fig. 9.**

TEOREMA VI. (Recíproco del V).—**Dos cuerdas de una circunferencia que unen los extremos homólogos de dos arcos iguales, son paralelas.**

Hip.) arc. AD=arc. BE (Fig. 9)
Tes.) AB||DE

1° **Dem.)** Se traza OH⊥AB.
D (↔) O (↔) E
Resulta: arc. **AH**=arc. **BH**. (Teor. II 3°)
y arc. **DH**=arc. **EH**.
∢1=∢2. (Teor. I Recíproco)
También OH⊥DE (OC=bisect. de △ isósc. DEO)
Luego: AB||DE (Dos o más ⊥s a una misma recta. . .)

2.° Demostración del teorema VI

OH⊥DE (Fig.9)
∴ arc DH=arc HE
arc AD+arc DH=arc BE+arc EH

OH dimidia arc AB ∴ dimidia $\overline{AB}$ ∴ OH⊥AB
∴ DE || AB (q. e. d.)

§ 4.—*PROPIEDADES DE LA TANGENTE A UNA CIRCUNFERENCIA*

Tangente es la recta que tiene un solo punto común con la circunferencia.

El punto en que la tangente toca a la circunferencia es el *punto de tangencia o de contacto.*

Una tangente se puede considerar como el *límite de las posiciones de una secante* **AB** que se desplaza paralelamente a sí misma y cuya distancia al centro tiende a igualar al radio. (Fig. 11).

También se la puede considerar como la posición *límite* de una secante **TE**, que gira alrededor de **T**, de modo que el punto de intersección **E** se aproxime al punto **T**, hasta confundirse con él. (Fig. 10).

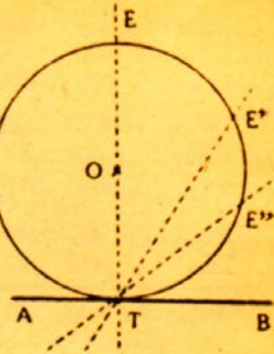


Fig. 10

TEOREMA VII.—**Toda tangente es perpendicular al radio en el punto de tangencia.**

Hip.): **MN** es tangente en **T.**
Tes.) **Mn⊥OT.**

1.ª Dem.): Fig. 11. Si se traslada la secante **AB** paralelamente a sí misma, de modo que aumente su distancia al centro, la cuerda **AB**, interceptada, se va haciendo cada vez menor. Su punto medio **D** y sus extremos **A** y **B**, se aproximan más y más a medida que se aleja del centro.

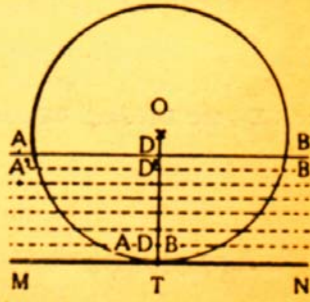


Fig. 11

Llegará un momento en que la secante ocupará la posición límite de la tangente **MN**. Entonces esos tres puntos, **D**, **A** y **B** coincidirán en **T**.

Como la recta que une el centro de una circunferencia con el punto medio de una cuerda es perpendicular a ella, **MN⊥OT**. (Teorema 23ª, 3.er A., O. Cano)

2ª Demostración del Teorema VII.—

Hip.) **AB** es tangente en **T**.
Tes.) **OT⊥AB** (Fig. 12).

Dem.) Por ser **AB** tangente a la ⊙, tiene un solo punto común con ella, es **T**.

De esto resulta que **OT** será la menor distancia que hay entre **O** y **AB**. Cualquier otro trazo será mayor que **OT**, por ej.: **OD**, por estar **D** situado fuera de la ⊙.

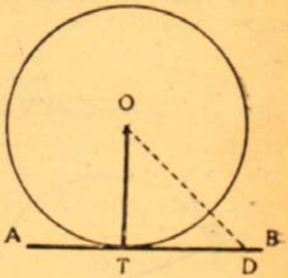


Fig. 12

Siendo **OT** la menor distancia, se tendrá que **OT⊥AB.**

TEOREMA VIII. (Recíproco del VII).—**La ⊥ en el extremo de un radio es tangente a la circunferencia.**

Hip.) **OT⊥AB** (Fig. 12).
Tes.) **AB** es tangente en **T**.

Dem.) Trazando la tangente a la circunferencia en él punto **T**, esta tangente será perpendicular al radio **OT**, según se demostró en el teorema anterior. Pero la perpendicular a **OT**, en el punto **T**, es única. Por consiguiente, se confundirá con **AB**.

Luego: **AB** es tangente.

COROLARIOS: 1.º) *Por cada punto de una circunferencia se puede trazar una sola tangente.*

2.º) *Todos los puntos de una tangente son exteriores a la circunferencia, menos el punto de contacto.*

3.º) *Las tangentes trazadas en los extremos de un diámetro son paralelas.*

§ 5.—NORMAL DE UNA CURVA.

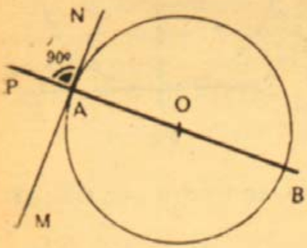


Fig. 13

Se llama **normal a una curva** en un punto dado **A** de ella, la perpendicular a la tangente en ese punto.

El punto **A** es el pie de la normal.

Si la curva es la circunferencia, la normal es el radio. En Fig. 13, **MN** es la tangente y **BOA** la normal.

§ 9.—LUGARES GEOMETRICOS REFERENTES A LA CIRCUNFERENCIA

> Recuérdese que: "*Lugar Geométrico* (*L. G.*) *es toda figura, línea recta o curva, o toda porción del espacio, cuyos puntos, exclusivamente gozan de una misma propiedad o satisfacen una misma condición*".

Tomando en cuenta la materia expuesta anteriormente y los Ls. Gs. estudiados en 3.er Año (1), se desprenden los siguientes lugares geométricos referentes a la circunferencia.

1er GRUPO DE Ls. Gs. (2)

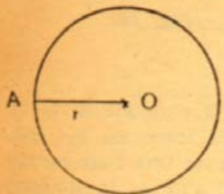


Fig. 14

L. G. 1.—*El L. G. de todos los puntos del plano que equidistan de un punto dado* **O** *en una magnitud dada* **r**, *es la ⨀ que tiene por centro el punto* **O** *y por radio* **r**. (Fig. 14).

Razón.— Por definición de circunferencia.

L. G. 2.—*El L. G. de los centros de las ⨀s de radio dado* **r**, *que pasan por un punto dado* **P**, *es la ⨀ descrita con el radio dado y con centro en el punto dado* **P**. (Fig. 15).

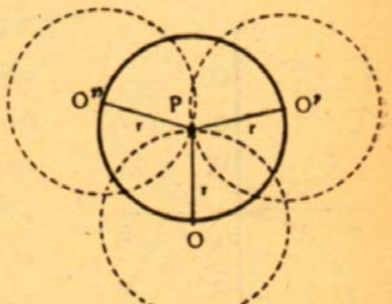


Fig. 15

Razón.—La distancia desde P a cada uno de los centro de las ⨀s es **r**.

---

(1) Es útil que se recuerden previamente los Ls. Gs. vistos en 3.er Año.

(2) Los otros grupos de Ls. Gs. se encuentran en las págs. 45 54 y 71).

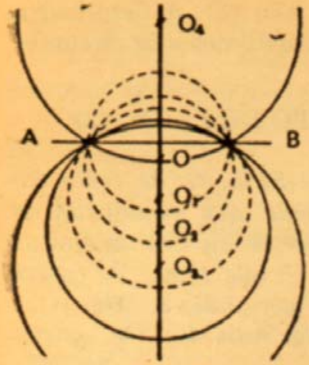
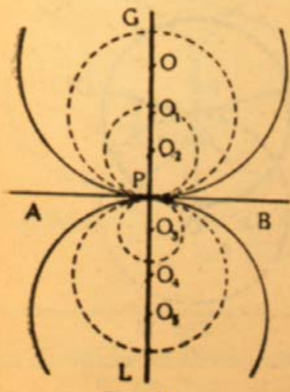


Fig. 16

L. G. 3.—*El L. G. de los centros de todas las ⊙s que pasan por dos puntos dados* **A** *y* **B**, *es la simetral de estos puntos.* (Fig. 16).

El L. G. 3 equivale al L. G. del vértice de todos los △s isósceles que tienen una base común dada AB, el cual es la simetral de dicha base.



Fgi. 17

L. G. 4.—*El L. G. de los centros de todas las ⊙s tangentes a una recta dada* **AB**, *en un punto dado* **P**, *es la perpendicular trazada en este punto.*

En Fig. 17, **GL** es el lugar geométrico.

Dem.) Teorema VII.

L. G. 5.—*El L. G. de los centros de todas las ⊙s de radio dado* **r** *tangentes a una recta dada* **L**, *se compone de* *dos ||s trazadas a ambos lados de la recta a la distancia del radio dado.*

M y **N** forman el L. G. (Fig. 18).

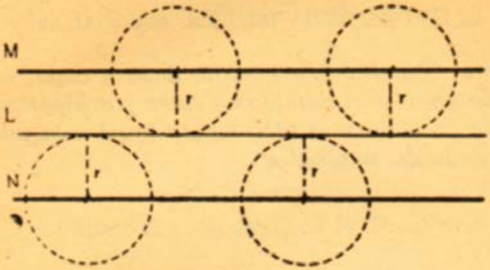


Fig. 18

L. G. 6.—*El L. G. de los centros de todas las* ⊙s (de cualquier radio) *que interceptan sobre una recta dada* **L** *su diámetro respectivo, es la misma recta dada.* (Fig. 19).

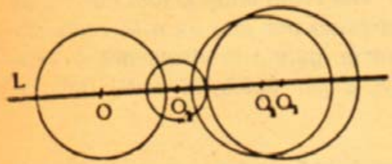


Fig. 19

L. G. 7.—*E L. G. de los puntos medios de todas las cuerdas de longitud dada* **c** *que se pueden construir en una circunferencia* **O**, *es una* ⊙ *concéntrica con la dada y cuyo radio es la distancia del centro a una de las cuerdas de longitud* **c**. (Fig. 20).

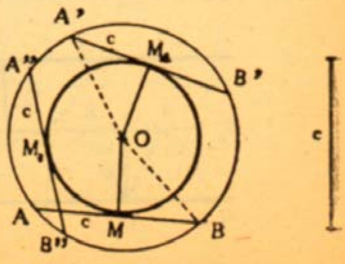


Fig. 20

Demostración: Teoremas II y III.

El L. G. 7 se puede, también, enunciar así:

"Es la ⊙ concéntrica con la dada y cuyo radio es un cateto de un △ rectángulo que tiene por hipotenusa el radio de la ⊙ dada y el otro cateto igual a la mitad de la cuerda dada de longitud **c***".*

En la Fig. 20, el L. G. es la ⊙ de radio = OM.

L. G. 8.—*El L. G. de los centros de las ⊙s de radio dado que interceptan sobre una recta dada* **L** *una cuerda de longitud dada* **c***, está constituido por dos ||s a la recta dada* **L***, trazadas a una distancia igual a la altura del △ isósceles que tiene por base* **c***, y por lados, el radio dado* **r***.* **(Fig. 21).**

Razón.—La distancia desde dichas cuerdas (o sea, desde la recta dada) a los centros de las ⊙s es constante.

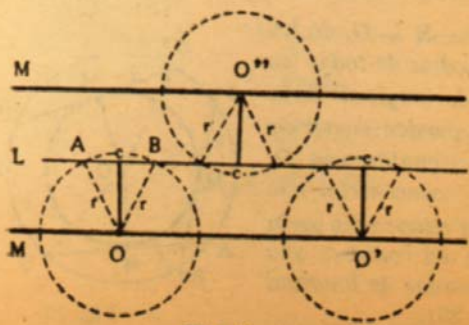


Fig. 21

CAPITULO II

ANGULOS EXCENTRICOS

§ 1.—*GENERALIDADES*

Por oposición a ángulo del centro (pág. 12), *ángulo excéntrico es aquel cuyo vértice está situado fuera del centro de la circunferencia.*

El vértice puede encontrarse en un *punto interior* de la circunferencia, en un *punto exterior* a ella o situado *sobre la misma* circunferencia.

En este último caso el *ángulo excéntrico* puede recibir los nombres de *inscrito, semi inscrito* y *ex inscrito.*

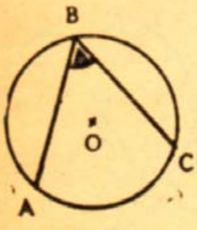


Fig. 22

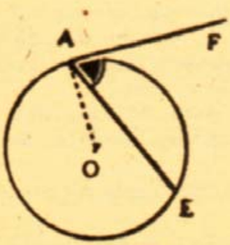


Fig. 23

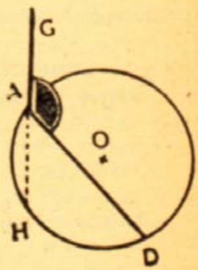


Fig. 24

Angulo inscrito es aquel cuyo vértice se encuentra sobre la circunferencia y sus lados son cuerdas. Fig. 22.

Angulo semi inscrito es aquel cuyo vértice está sobre la circunferencia y está formado por una cuerda y una tangente. Fig. 23.

El ángulo semi inscrito se puede considerar como el límite de un ángulo inscrito cuando uno de sus lados se considera girando alrededor del vértice hasta quedar tangente a la circunferencia,.

Angulo ex inscrito es el que está formado por una cuerda y la prolongación de otra y cuyo vértice está sobre la circunferencia. Fig. 24.

§ 2.—PROPIEDAD DEL ANGULO INSCRITO

TEOREMA XI.— **Todo ángulo inscrito es igual a la mitad del ángulo del centro (1) cuyos lados interceptan o comprenden el mismo arco.**

Para la demostración de esta propiedad distinguiremos tres casos, según la posición del centro con relación al ángulo inscrito.

---

(1) Como todo $\measuredangle$ del centro se mide por el arco descrito entre sus lados, desde el vértice como centro, la medida de un $\measuredangle$ del centro y dei arco interceptado por sus lados, se expresan por el mismo número, aun cuando dichas cantidades sean de naturaleza distinta (ángulo y arco).

Ejemplo: Sea el $\measuredangle$ AOB$=60°$ (Fig. 25). Si se divide en 60 $\measuredangle$s iguales, cada uno de ellos es un $\measuredangle$ de 1°.

Cada uno, también, intercepta un arco de 1°.

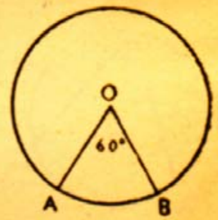


Fig. 25

El número que expresa la medida del arco **AB** es igual también a 60°.

Luego medida $\measuredangle$**AOB**= medida arco AB.

Por tal motivo, frecuentemente el teorema que se refiere a la propiedad del ángulo inscrito, se enuncia refiriéndolo al arco, de esta manera:

"Un ángulo inscrito es igual (o tiene por medida) a la mitad del arco comprendido entre sus lados".

1er. CASO.— El centro del círculo está situado sobre uno de los lados del ángulo. Fig. 26.

Hip.) α es un $\sphericalangle$ inscrito.

Tes.) $\alpha = \frac{1}{2}\beta$

Dem.) $\triangle AOC$ isósceles.

Entonces $\sphericalangle \mathbf{A} = \sphericalangle \mathbf{C}$.

Por tanto $2\alpha=\beta$ (Un $\sphericalangle$ exterior de un $\triangle$ . . .)

Luego $\alpha=\frac{1}{2}\beta$

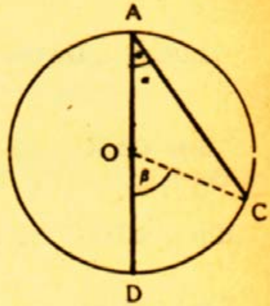


Fig. 26

2.o CASO.— El centro está situado dentro del ángulo. Fig. 27.

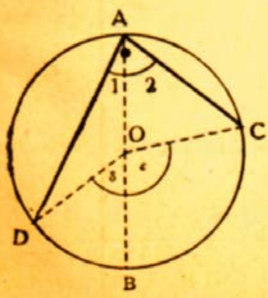


Fig. 27

Hip.) $\sphericalangle$**DAC** inscrito.

Tes.) $\sphericalangle \mathbf{DAC} = \frac{1}{2} \sphericalangle \mathbf{DOC}$

Dem.) Trácese el diámetro **AB**. Se tiene:

$\sphericalangle \mathbf{DAC} = \sphericalangle 1 + \sphericalangle 2$

Pero $\sphericalangle 1 = \frac{1}{2}\delta$ (1.er Caso)

$\sphericalangle 2 = \frac{1}{2}\varepsilon$ (1.er Caso)

Sumando m. a m. las 2 últimas iguald.

$$\sphericalangle 1+\sphericalangle 2=\frac{\delta+\varepsilon}{2}$$

Luego $\sphericalangle \mathbf{DAC}=\frac{1}{2}\sphericalangle \mathbf{DOC}$.

3.er CASO.—El centro de la circunferencia está fuera del ángulo. (Fig. 28).

Hip.) $\sphericalangle \mathbf{DAC}$ inscrito

Tes.) $\sphericalangle \mathbf{DAC}=\frac{1}{2}\sphericalangle \mathbf{DOC}$

Dem.) $\sphericalangle \mathbf{DAC}=\sphericalangle \mathbf{BAC}-\sphericalangle \mathbf{BAD}$

Pero $\sphericalangle \mathbf{BAC}=\frac{1}{2}\sphericalangle \mathbf{BOC}$ (1.er caso)

y $\sphericalangle \mathbf{BAD}=\frac{1}{2}\sphericalangle \mathbf{BOD}$ (1.er Caso)

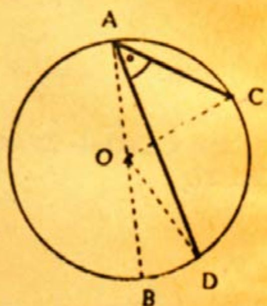


Fig. 28

Restando m. a m. las 2 últimas igualdades

Se tiene: $\sphericalangle \mathbf{BAC}-\sphericalangle \mathbf{BAD}=\frac{\sphericalangle \mathbf{BOC}-\sphericalangle \mathbf{BOD}}{2}$

o sea: $\sphericalangle \mathbf{DAC}=\frac{1}{2}\sphericalangle \mathbf{DOC}$. (Q. E. D.)

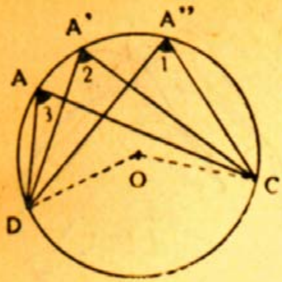


Fig. 29

COROLARIOS 1.—*Todos los ángulos inscritos cuyos lados interceptan en una* ⊙ *un mismo arco, son iguales.*

Dem.) En Fig. 29 $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 2 = \sphericalangle 3$ porque cada uno es igual a

$\frac{1}{2} \sphericalangle$ **DOC** (Teor. IX).

2.—*Dos o más ángulos inscritos cuyos lados interceptan arcos iguales en una misma* ⊙ *o en circunferencias congruentes, son iguales.*

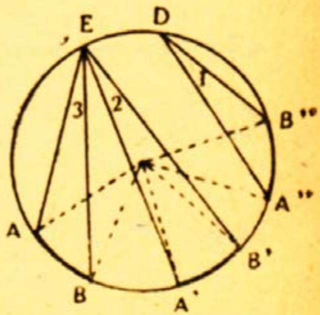


Fig. 30

Dem.) En la Fig. 30 arc. **AB** = arc **A' B'** = arc **A" B"**.
$\sphericalangle 1 = \sphericalangle 2 = \sphericalangle 3$, por ser iguales a la mitad de ángulos del centro iguales.

¿Por qué son iguales dichos ángulos del centro?

3.—*Los ángulos inscritos que comprenden entre sus lados arcos cuya suma completan la circunferencia entera, son suplementarios.* (1) Fig. 31.

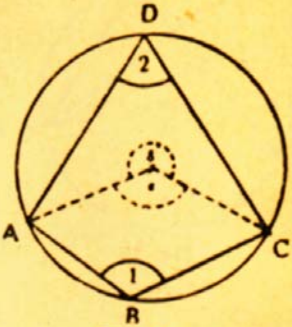


Fig. 31

Tes.) $\sphericalangle 1+\sphericalangle 2=180°$

Dem.) $\sphericalangle 1 = \frac{1}{2}\delta$ (áng. convexo).

$\sphericalangle 2 = \frac{1}{2}\varepsilon$ (áng. cóncavo).

$$\sphericalangle 1+\sphericalangle 2= \frac{1}{2}(\delta+\varepsilon)$$

Pero $\delta+\varepsilon=360°$.

Luego: $\sphericalangle 1+\sphericalangle 2=\frac{\delta+\varepsilon}{2}=180°$

Los arcos cuya suma es igual a la circunferencia entera suelen designarse con el nombre de **arcos supletorios.** En la Fig. 31 los arcos **ABC** y **ADC** son supletorios. También lo son los arcos **BAD** y **BCD**.

---

(1) Este corolario (el 3) equivale a decir que los $\sphericalangle$s opuestos de un cuadrilátero inscrito en una $\odot$ son suplementarios.

4.—*Todo ángulo inscrito en una semicircunferencia es un ángulo recto.* (Esta propiedad del ángulo inscrito se conoce con el nombre de **Teor. de Thales** (1). Figura 32).

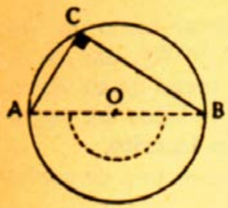


Fig. 32

Tes.) $\measuredangle$ inscr. **ACB**$=90°$

Dem.) Como arc. ACB = una semi circunferencia,
el $\measuredangle$ del centro **AOB**=un $\measuredangle$ extendido$=180°$.
Luego el $\measuredangle$ inscrito

$$\mathbf{ACB}=\frac{1}{2}\measuredangle\mathbf{AOB}=90°$$

5.— *La bisectriz de un $\measuredangle$ inscrito pasa por el punto medio del arco interceptado por los lados.* Fig. 33.

Dem.) Si $\measuredangle 1=\measuredangle 2$, se tendrá: arc. BD =arc. DC.

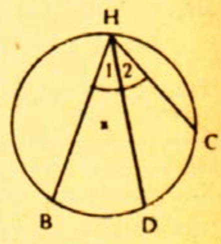


Fig. 33

6.—Recíprocamente de corol. 5, *La recta que une el vértice de un $\measuredangle$ inscrito con el punto medio del arco comprendido entre sus lados, es bisectriz de este ángulo.*

---

(1) Thales de Mileto (VI Siglo A. C.). Nació en Fenicia; después fue a instruirse a Egipto. En este país logró medir la altura de las pirámides por medio de su sombra. Más tarde llevó la Geometría a Grecia. En Mileto funda la Escuela Jónica y enriquece la ciencia con diversos teoremas sobre el $\triangle$ isósceles, el ángulo inscrito, los triángulos semejantes.

En Fig. 33, si arc. **BD**=arc. **DC**, se tendrá que: $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 2$.

§ 3.—PROPIEDAD DEL ANGULO SEMI-INSCRITO

Como este ángulo se puede considerar como un caso particular del ángulo inscrito (pág. 31 y 32), uno de cuyos lados o cuerdas ha ido girando en torno de su vértice hasta convertirse en tangente, las propiedades del ángulo semi-inscrito son las mismas **del ángulo inscrito.**

Con todo, vamos a dar a continuación una demostración directa.

TEOREMA X.—**Un ángulo semi-inscrito** (formado por una cuerda y una tangente) **es igual a la mitad del ángulo del centro, cuyos lados comprenden el mismo arco.** (1).

Hip.) $\alpha = \sphericalangle$ semi-inscrito (Fig. 34).

Tes.) $\alpha = \dfrac{1}{2} \sphericalangle \mathbf{AOC}$.

Dem.) **A** ($\leftrightarrow$) **O** ($\leftrightarrow$) **C.**
Se traza: **OB**=bisec. de $\sphericalangle$**AOC**
Resulta: **OB**$\perp$**AC** (Teorema II).
y $\alpha + \sphericalangle 1 = 90°$
$\sphericalangle 2 + \sphericalangle 1 = 90°$.

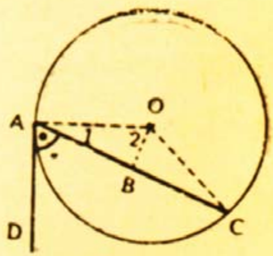


Fig. 34

---

(1) El teorema del $\sphericalangle$ semi-inscrito se suele enunciar así: **"Un ángulo semi-inscrito es igual (o tiene por medida) a la mitad del arco comprendido entre sus lados". (Léase la nota al pie de la pág. 32).**

$\therefore\ \alpha + \sphericalangle 1 = \sphericalangle 2 + \sphericalangle 1$ ¿Por qué?

$\therefore\ \alpha = \sphericalangle 2$ ¿Por qué?

$$\text{Pero } \sphericalangle 2 = \frac{1}{2} \sphericalangle \mathbf{AOC}.$$

$$\text{Luego: } \alpha = \frac{1}{2} \sphericalangle \mathbf{AOC}.$$

2.ª Demostración del Teorema X

(Del $\sphericalangle$ semi-inscrito).

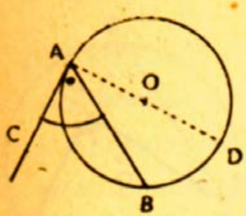


Fig. 35

$$\sphericalangle \mathbf{CAB} = \sphericalangle \mathbf{CAD} - \sphericalangle \mathbf{BAD}. \text{ Fig. 35.}$$

$$= \frac{1}{2} \text{ arc. } \mathbf{ABD} - \frac{1}{2} \text{ arc.} \mathbf{BD}$$

$$= \frac{1}{2} \text{ arc. } \mathbf{AB}.$$

3.ª Demostración del Teorema X

Un ángulo semi-inscrito es igual a la mitad del arco comprendido entre sus lados (1)

Hip.) $\alpha = \sphericalangle$ semi-inscrito

Tes.) $\alpha = \frac{1}{2}$ arc. AG

Dem.) $OM \perp AG$

$\therefore\ \sphericalangle 2 = \frac{1}{2}$ arc. $AG = 90° - \sphericalangle 1$

Pero $\sphericalangle \alpha = 90° - \sphericalangle 1$

$\therefore\ \sphericalangle \alpha = \frac{1}{2}$ arc. AG

Demostrar que

$\sphericalangle IAG = \frac{1}{2}$ arc. ANG

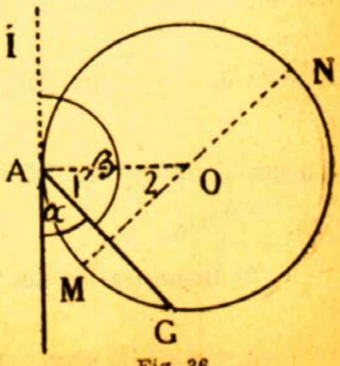


Fig. 36

(1) Léase la nota al pie de la pág. 38.

TEOREMA XI.—**El ∢ interior, o sea, el que tiene su vértice en el interior de una ⊙, tiene por medida la semisuma de los arcos comprendidos entre sus lados y las prolongaciones de ellos más allá del vértice.**

Hip.) α áng interior.

Tes.) $\alpha = \frac{1}{2}$arc. **BC**+ $\frac{1}{2}$ arc. **DE**

Dem.) **D** ↔ **B** (Fig. 36).

$\alpha = \delta + \varepsilon$ (¿Por qué)

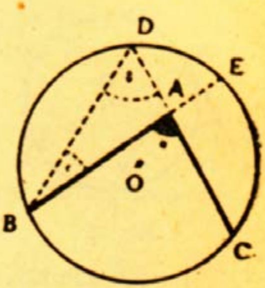


Fig. 36

Medida de $\delta = \frac{1}{2}$ arc. **BC**
(Nota del pie de la pág. 32).

Medida de $\varepsilon = \frac{1}{2}$ arc. DE

Luego: $\alpha = \frac{1}{2}$ arc. BC+ $\frac{1}{2}$ arc. DE

2ª Demostración del Teorema XI.— (Fig. 37).

Sea **∢BAC** interior y **AE** y **AD** las prolongaciones de sus lados.

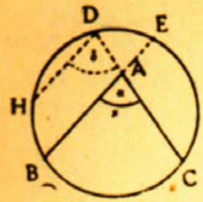


Fig. 37

DH $\parallel$ AB

$$\alpha = \delta = \frac{1}{2}\text{arc. BC} + \frac{1}{2}\text{arc. HB}$$

Pero arc. DE=arc. HB (Teor. V).

Luego $\alpha = \delta = \dfrac{1}{2}$ arc. BC+ $\dfrac{1}{2}$ arc. DE.

TEOREMA XII.—**El ∢ exterior, o sea, el formado por dos secantes que parten de un mismo punto situado fuera del círculo, tiene por medida la semi-diferencia de los arcos comprendidos entre sus lados.**

Hip.) $\alpha = \sphericalangle$ exterior. (Fig. 38).

Tes.) $\alpha = \dfrac{\text{arc. CB} - \text{arc. DE}}{2}$

Dem.) B (↔) D

$\sphericalangle 1 = \alpha + \sphericalangle 2$ (∢ exterior de 1 △)

$\therefore \alpha = \sphericalangle 1 - \sphericalangle 2$

Pero $\sphericalangle 1 = \dfrac{\text{arc. CB}}{2}$

$\sphericalangle 2 = \dfrac{\text{arc. DE}}{2}$

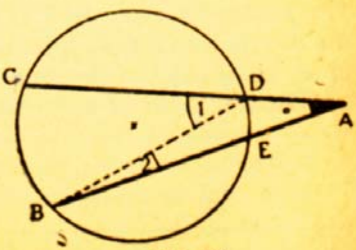


Fig. 38

Luego $\alpha = \dfrac{\text{arc. CB} - \text{arc. DE}}{2}$

(Q. E. D.)

Demuéstrese el teorema XII por medio de la Fig. 39.

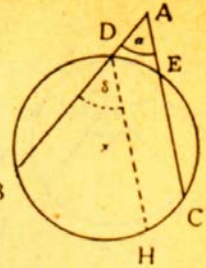


Fig. 39

§ 4.—*ARCO CAPAZ DE UN ANGULO*

En la Fig. 40 la cuerda **AB** divide al círculo en dos segmentos: segm. **ABF** y **ABCC'C"A**.

Si en uno de estos segmentos, en el último, por ejemplo, unimos algunos puntos **C,C' C"** . . . de su arco con los extremos **A** y **B**, se forman los ∢ **ACB** $=$**AC'B**$=$**AC"B**$=\gamma$; según se dejó establecido en Corol. 1.º página 37.

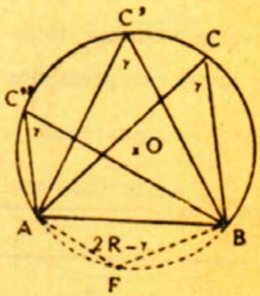


Fig. 40

Pero como al unir cualquier otro punto del arco **BCC'C"A** con **A** y **B** siempre se formará un ∢ igual a γ, se dice que el arco **BCC'C"A** es el arco capaz del ∢γ.

Arco capaz de un ángulo es el arco del segmento en el cual se puede inscribir dicho ángulo.

Angulo inscrito en un arco es el ángulo que tiene su vértice en dicho arco y cuyos lados pasan por los extremos del mismo arco.

PROBLEMA FUNDAMENTAL 2°.—*Dado un* ∢ γ *y un trazo* **c**, *construir el arco capaz de* γ *sobre* **c** *como cuerda.*

1.ª Solución.—Se aprovecha la propiedad del ∢ semi-inscrito. **(Pág. 38).**

Hágase: AB=c
(Fig. 41a).
∢ABE=γ
BO⊥BE
DA=DB
DO⊥AB (simetral de AB)

Descríbase arc. (O, OB=r).
arc. ACB = arco capaz de γ.

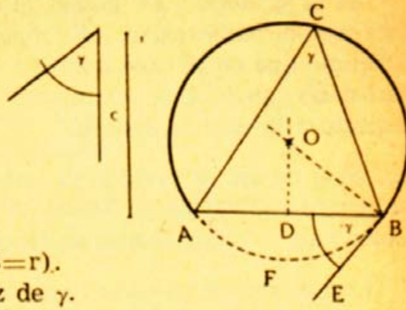


Fig. 41a

2.ª Solución del problema fundamental 2º

Se aplica el teorema IX, pág. 32. El centro del arco capaz debe ser el vértice de un △ isósceles de base AB=c y cuyo ∢AOB del vértice =2γ.

Constr.—Se hace AB=c
DA=DB
DE ⊥ AB (simetral AB)

En un punto arbitrario E de la simetral de AB se hace:

∢DEF=γ
y BO || EF (por B)
Descríbase arc. (O, OB);
OC = OB = OA
arc. **ACB** = arco capaz de γ.

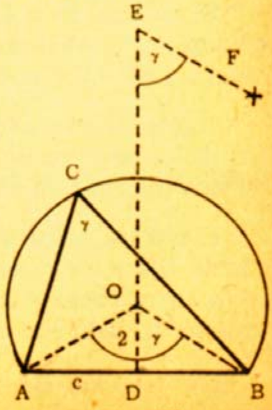


Fig. 41b

Se puede observar que cuando el *ángulo dado* γ *es agudo*, el *arco capaz* es *mayor* que una *semi-circunferencia* (Figs. 40 y 41) y tanto mayor cuanto menor es el ángulo, siempre que la cuerda **c** no varíe.

Si *el* ∢ *dado* γ *es obtuso*, el *arco capaz* es *menor* que *una semi-circunferencia*. El método para construirlo es el mismo que en el caso anterior (Probl. 2, pág. 43), pero su centro no quedará en el mismo lado que el arco capaz, respecto a la cuerda dada **c**.

Si γ *es un* ∢ *recto*, el *arco capaz es una semi-circunferencia*. Teorema de Thales, pág. 37) y su centro estará situado en el punto medio de la cuerda **AB=c.**

Con el arco supletorio capaz de γ, sucede todo lo contrario: si γ es **agudo,** el arco supletorio es menor que una semi-circunferencia, y mayor si γ es **obtuso.**

Si en Fig. 40 o 41 se une un punto cualquiera del arco supletorio **AFB** con los puntos **A** y **B,** el ∢**AFB** será igual a $180^\circ - \gamma$ (Corolario 3º, pág. 36).

Tanto el arco capaz como su arco supletorio son Ls. Gs. de los vértices de los ángulos que, respectivamente, se pueden inscribir en ellos.

Como los lados de dichos ángulos forman $\triangle$s con la cuerda fija **c**, se puede afirmar, también, que los mismos arcos (arco capaz y supletorio) son Ls. Gs. de los vértices opuestos al lado fijo común.

Los tres Ls. Gs. siguientes, resumen lo expuesto sobre el arco capaz.

§ 5.—2.º GRUPO DE Ls. Gs. (1)

L. G. 9. (2)—*El L. G. de los terceros vértices de todos los △s. que tienen el lado* **BC=a** *común y el ángulo opuesto igual a un ángulo dado* α, *es el arco capaz de* α *construido sobre* **a** *como cuerda.* (Fig. 42 a)

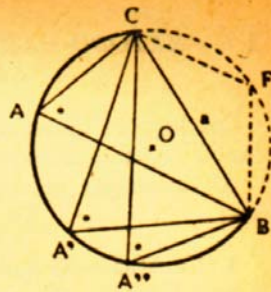


Fig. 42a

L. G. 10.— (Consecuencia del L. G. 9) *El arco supletorio* **BFC** (*del arco capaz de* α), *Fig.* 42 a, *es el L. G. de los terceros vértices de todos los △s que tienen el lado* **BC=a** *común y el ángulo opuesto igual a* $180° - \alpha$.

L. G. 11.—*El L. G. de los vértices correspondientes al ángulo recto de todos los △s rectángulos que tienen una misma hipotenusa* **c**, *es la circunferencia que tiene por diámetro la hipotenusa* **c** Fig. 43.

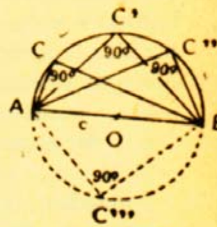


Fig. 43

(1) Los otros grupos de Ls. Gs. se encuentran en las páginas 23, 54 y 71.

(2) Más exactamente el L. G. 9 está formado por dos arcos de ⊙ que tienen por extremos B y C y que son simétricos con respecto al trazo o segmento BC. Fig. 42 b.

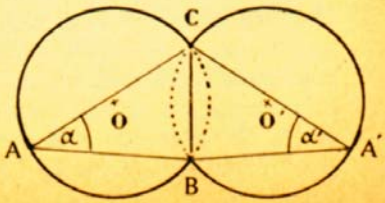


Fig. 42b

§ 6.—*METODO PARA DETERMINAR UN LUGAR GEOMETRICO*

Los lugares geométricos que estudiamos se reducen a *rectas* o *segmentos rectilíneos* o a *circunferencias* o *arcos.*

Al investigar un lugar geométrico, pueden ocurrir 3 casos:

1.er CASO.—*El lugar geométrico pedido se reduce fácilmente a un L. G. conocido o "clásico".*

a) *Se observan* los *puntos* de la figura del problema que permanecen *fijos* al desplazarse el punto móvil cuyo L. G. se busca, así como las *longitudes* y los *ángulos* que permanecen *constantes.*

Entonces surge la idea del L. G. que, de entre los conocidos, conviene al caso actual.

Así, por ejemplo:

—Si el punto móvil debe equidistar de 2 *puntos fijos* **A** y **B**, estará sobre la simetral o ⊥ *media* de **AB**.

—Si el punto móvil es vértice de un ángulo recto *cuyos lados pasan por 2 puntos fijos* **A** *y* **B**, estará sobre la ⊙ de diám. **AB**.

—Si el punto móvil es el punto medio M de *una cuerda de longitud constante* que se desplaza en una ⊙ de centro **O**, estará sobre la ⊙ de radio **OM**, etc.

b) Después *se comprueba* recíprocamente que *todos los puntos del L. G.* vislumbrado *cumplen* con todas las *condiciones* particulares del problema.

c) Finalmente, cuando lo requiera el problema, *se limita el L. G. obtenido* a la *parte de él* que *contiene los puntos* que *satisfacen las condiciones* particulares del problema.

EJEMPLO: Problema.— *Por un punto A exterior a una ⊙ **O** se traza una secante variable que corta la circunferencia en **B** y **C**, $\mathbf{B_1}$ y $\mathbf{C_1}$, $\mathbf{B_2}$ y $\mathbf{C_2}$, etc.*

¿Cuál es el L. G. del punto medio de la cuerda **BC?** Fig. 44.

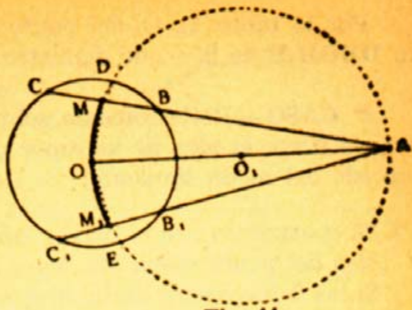


Fig. 44

Solución.—Construyo la ⊙ de diámetro **OA.**

Trazo la secante **AC.**

Sea **M el** punto medio de la cuerda **BC.**

—Los puntos **O** y **A** son fijos.

El punto **M** es móvil. Trazo **MO** y **MA.**

El ∢**OMA** es siempre recto, porque **OM** une el centro **O** con el punto medio de la cuerda **BC.**

Los lados de este ∢ recto **OMA** pasan por 2 puntos fijos **O** y **A.**

—Luego: el punto **M,** medio de todas las cuerdas **BC,** se halla siempre sobre la ⊙ de diámetro **OA.** Esta circunferencia es el L. G. del punto **M.**

Recíprocamente: *Cualquier punto de la ⊙ de diám.* **OA** *es vértice de un ∢* **OMA** *que siempre es recto, por ser inscrito en una semi-circunferencia.*

Queda comprobado que la ⊙ de diám. **OA** es el L. G. del punto **M.**

Finalmente, para que **M** sea el punto medio de una cuerda de la ⊙ **O,** debe hallarse en el interior de esta circunferencia **O.**

Por lo tanto, L. G. del punto **M** debe limitarse al arco **DMOM$_1$E** de la ⊙ de diámetro **OA**.

2° **CASO.**—Reflexionando sobre los datos del problema, *no surge la idea de un lugar geométrico conocido.* Se procede del modo siguiente:

1°. *Se construyen* con el mayor cuidado 3 *posiciones notables del punto móvil* **M$_1$, M$_2$** *y* **M$_3$**.
Si las 3 *posiciones están en línea recta, el* L. G. pedido *es una recta.*
Si las 3 *posiciones no están en línea recta,* el L. G. pedido *es una* ⊙ *o un arco.*

2°. Se establece el L. G. comprobando recíprocamente si los demás puntos de la recta o de la ⊙ cumplen con las condiciones del problema.

3°. Cuando el problema lo requiera, *se limita el L. G. a un segmento rectilíneo o a un arco.*

EJEMPLO: Problema.—*Hallar el L. G. de los puntos extremos de todas las secantes a una* ⊙ *trazadas en un punto* **A** *de ella, y tales que la parte interna o cuerda de cada secante tenga igual longitud que la parte externa.*

Solución.—1.°: Construyo 3 puntos notables del L. G. pedido: **A, C,** y uno cualquiera **E,** trazando en cada caso una secante **ABC, ADE** y limitándola de modo que la parte exterior **BC, DE,** sea igual a la parte interior **AB, AD.** Se tiene **AB**=**BC, AD**=**DE.** (Fig. 45).

2º: Los 3 puntos **A, C, E,** no están en línea recta. Luego, el L. G. es una $\odot$.

Hay que averiguar su centro y su radio.

Trazo **DB** y **EC**. **DB** es mediana del $\triangle$ **AEC**. Luego **EC** $\parallel$ **DB**.

pero el $\measuredangle$ **D** es recto. Luego, también, el $\measuredangle$ **AEC** es recto. Por tanto, se halla inscrito en la $\odot$ de centro **B** y radio **BE=BA=BC.**

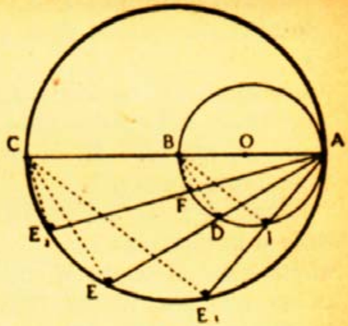


Fig. 45

Luego, el L. G. pedido es la $\odot$ de diám. **AC y centro** en **B**, que es **L. G. conocido o "clásico".**

3º Compruebo que un punto cualquiera $\mathbf{E_1}$ de esta $\odot$ cumple las condiciones requeridas: En efecto: el $\measuredangle$ $\mathbf{E_1}$ es recto. Luego $\mathbf{E_1C} \parallel \mathbf{IB}$. Luego **IB** es mediana del $\triangle$ $\mathbf{AE_1C}$. Luego $\mathbf{AI=IE_1}$.

3.er CASO: *No se pueden construir fácilmente puntos notables del lugar.*

Entonces, se transforma la propiedad del punto móvil **M** en otra más sencilla que sea consecuencia de la primera, y así sucesivamente, hasta que se llegue a un lugar conocido o "clásico".

Se demuestra la existencia de este lugar.

Luego, se limita este lugar a las condiciones del problema.

EJEMPLO: Problema.—*Dado un ángulo* **XOY**, *y un punto* **M** *en su interior, se trazan desde* **M** *las perpendiculares* **MA** *y* **MB** *a los lados. ¿Cuál es el L. G. de los pun-*

tos **M** *para los cuales se verifica* **MA+MB=k**, *siendo* **k** *una longitud constante dada?*

Solución.— No es fácil aquí construir los puntos del lugar.

Prolongo **AM** en una longitud **MD=MB.** (Fig. 46).

Se tiene **AM+MD=AM+MB=k.**

Así, al moverse **M**, la recta **AMD** guarda una longitud constante igual a **k.**

Luego, el **L. G.** del punto **D** es una paralela **DE** a **OX** trazada a la distancia **k.**

Ahora bien: el punto **M** equidista de las dos rectas fijas, **OY** y **DE**, pues **MB=MD.**

Luego se halla siempre sobre la bisectriz del ∢ **OED.** Trazo esta bisectriz **EF.**

Resulta que: 1º Todo punto **M** tal que **MA+MB=k** se halla sobre la bisectriz **EF**, como acaba de demostrarse.

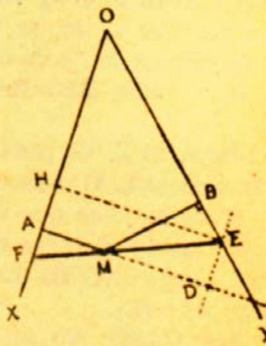


Fig. 46

y 2.º: Recíprocamente, todo punto de la bisectriz posee las propiedades requeridas para el punto **M** del problema, ya que se tiene:

$$\mathbf{MB=MD}$$
$$\mathbf{AM+MB=AM+MD}$$
$$\mathbf{AM+MB=AD=k}$$

Por lo tanto, *el L. G. pedido es el segmento* **EF** *de la bisectriz del* ∢**DEB** o también: *es la base de un △ isósceles cuyo* ∢ *del vértice es* **O,** y la altura relativa a cualquiera de los dos lados iguales es **EH=AD=k.**

RESUMEN

Para determinar un L. G., se debe:

1.º *Formarse una idea aproximada de la forma y posición del lugar*
ya por simple *intuición*,
ya por *análisis* de los datos (1.er caso).
ya por la construcción de algunos puntos (2.º caso).
ya *transformando la propiedad* dada en otra más sencilla (3.er caso).

2.º *Demostrar la existencia del lugar* (los puntos que cumplan los requisitos del problema están en el lugar —y recíprocamente, todos los puntos del lugar cumplen con todos los requisitos del problema).

3.º En ciertos casos, i. e., cuando el caso lo requiere, **limitar el lugar a los solos puntos que** *satisfacen el enunciado del problema.*

4.º Es ventajoso muchas veces, como conclusión o comprobación, *hacer la construcción gráfica del lugar.*

§ 7.—*PROPIEDADES DE LAS TANGENTES TRAZADAS A UNA CIRCUNFERENCIA DESDE UN PUNTO SITUADO FUERA DEL CIRCULO*

PROBLEMA FUNDAMENTAL 3.º—*Desde un punto dado* **A** *situado al exterior de una circunferencia* **O**, *trazar las tangentes a ella.* Fig. 47.

Análisis.—

Como **AB⊥OB** y **AC⊥OC** (Teor. VII) y además **OA** es fija, los puntos de tangencia **B** y **C**, deben hallarse en los dos Ls. Gs. siguientes:

1.º La ⊙ de diámetro **OA** (L. G. 11, pág. 45).

2.º La ⊙ dada en la cual necesariamente deben hallarse los puntos de tangencia.

Construcción.—

1.º A(↔)O

2.º Hágase **MO=MA**

3.º. Se describe la ⊙ auxiliar de diámetro **OA**, que corta a la ⊙ dada **O**, en **B** y en **C**, que son los pun- de tangencia.

4.º B(↔)A(↔)C

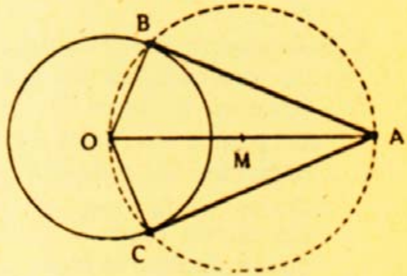


Fig. 47

AB y **AC** = tangentes pedidas.

Demostración.—B(↔)O(↔)C

Los ∢s **OBA** y **OCA** son ∢s. inscritos en una semi-circunf. (semi-circunf. **OBA** y **OCA** respect.)

Por lo tanto $\sphericalangle$ **OBA**$=\sphericalangle$**OCA**$=$**90°.** (Teor. de Thales, pág. 37).
Entonces **AB**$\perp$**OB** (en **B**)
y **AC**$\perp$**OC** (en **C**)
Luego: **AB** y **AC** son tangentes de la $\odot$ **O.**

TEOREMA XIII.—**Las tangentes trazadas a una $\odot$ desde un punto situado fuera de ella, son iguales.** (Fig. 48).

Hip.) **AB** y **AC** son tangentes.
Tes.) **AB=AC**

Dem.) $\triangle$**ABO**$\cong\triangle$**ACO** porque tienen:
BO=CO
AO=AO (común)
$\sphericalangle$**ABO**$=\sphericalangle$**ACO**$=90°$

Luego **AB**$=$**AC.**

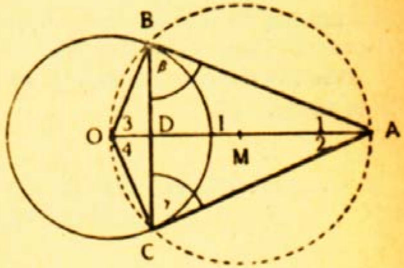


Fig. 48

2.ª Demostración del Teorema XIII

$\beta=\gamma$ (Por ser $\sphericalangle$s semi inscritos cuyos lados interceptan un mismo arco **BIC**).

$\triangle$**BCA isósceles.**

$\therefore$**AB=AC.**

COROLARIOS.— Si desde un punto fuera de una $\odot$ se trazan las tangentes a ella:

1º La recta que une el punto con el centro de la $\odot$, es bisectriz del ángulo formado por las tangentes y del ángulo del centro respectivo.

2º La misma recta es $\perp$ media (simetral) *del trazo que une los puntos de tangencia.*

3º *El ∢ formado por las tangentes es suplemento del ∢ del centro determinado por los radios trazados por los puntos de tangencia.*

Demostración. — Los △s **BCA** y **BCO** son isósceles. Fig. 48.

Se aplican las propiedades de la recta que une los vértices de dos △s isósc. que tienen una base común: "bisecta los ángulos de los vértices, dimidia la base y es ⊥ a ella". (Geometría Omer Cano, 3.er Año de Hdes., Teor. 27).

OBSERVACION.—En la Fig. 48, **OA** es eje de simetría de toda la figura.

§ 8.—*3.er GRUPO DE Ls. Gs.* (1) *REFERENTES A LA CIRCUNFERENCIA*

L. G. 12.—*El L. G. de todos los puntos de los cuales parten tangentes de igual longitud dada* **l**, *a una circunferencia* **O**, *es otra* ⊙ *concéntrica con la dada, cuyo radio es la hipotenusa de un △ rectángulo que tiene por catetos el radio de la* ⊙ *dada, y la longitud* **l** *que deben tener las tangentes.*

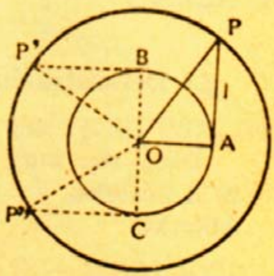


Fig. 49

La ⊙ de radio **OP** es el L. G. Fig. 49.

(1) Los otros grupos de Ls. Gs. se encuentran en las páginas 23, 45 y 71.

Demostración.—$\triangle OAP \cong \triangle OBP' \cong \triangle OCP''$ por tener dos lados y el ∢ comprendido iguales.

Luego **AP=BP'=CP"=l.**

L. G. 13.—*El L. G. de todos los puntos* **P** *de los cuales parten dos tangentes a una circunferencia dada* **O** *y que forman en* **P** *un* ∢ *dado* α *es una* ⊙ *concéntrica, cuyo radio es la hipotenusa de un* △ *rectángulo que tiene por cateto el radio de la* ⊙ *dada y el* ∢ *opuesto a este cateto igual a* $\frac{\alpha}{2}$ (Fig. 50).

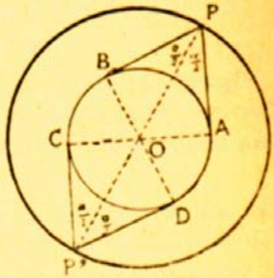


Fig. 50

Dem.) $\triangle OAP \cong \triangle ODP'$

$$\therefore \sphericalangle OPA = \sphericalangle OP'D = \frac{\alpha}{2}$$

$$\therefore \sphericalangle BPA = \sphericalangle CP'D = \alpha$$

L. G. 14.—*El L. G. de los centros de las* ⊙*s tangentes a dos paralelas dadas, es la paralela equidistante trazada entre ellas.* (Fig. 51).

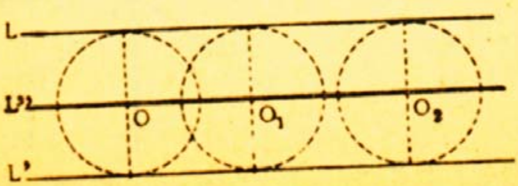


Fig. 51

L. G. 15.—*El L. G. de los centros de las ⊙s tangentes a los lados de un ángulo es la bisectriz de dicho ángulo* Fig. 52.

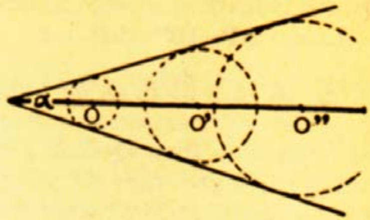


Fig. 52

Razón.—El centro de cada una de las ⊙s tangentes a los lados del ∢ equidista de ellos, por tal motivo debe encontrarse sobre la bisectriz.

L. G. 16.—*El L. G. de los centros de las ⊙s tangentes a 2 rectas que se cortan está formado por las bisectrices de los ángulos que las rectas forman al cortarse.*

En la Fig. 53, las rectas **CD** y **EF** constituyen el L. G.

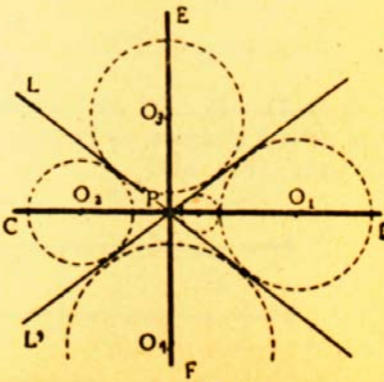


Fig. 53

Obsérvese que el L. G. está formado por dos rectas ⊥s. ¿Por qué

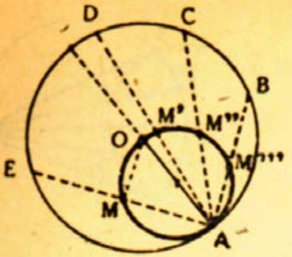


Fig. 54

L. G. 17.—*El L. G. de los puntos medios de todas las cuerdas que parten de un mismo punto* **A** *situado sobre una* ⊙ **O** *es la* ⊙ *que tiene por diámetro el trazo que une el punto* **A** *con el centro de la circunferencia dada* **O**. Fig. 54.

Demostración.—∢ inscrito OMA$=90°$. (Inscrito en una semi-circ.).

Por tanto: **OM⊥AE.**

Luego **M** es punto medio de **AE.**

GENERALIZACION DEL L. G. 17.—Se pueden considerar cuatro casos según sea la situación del punto A en el plano.

1.er CASO.—El punto **A** está situado sobre la circunferencia. Es el caso que se contempló en el L. G. 17. Fig. 54.

2º CASO.— El punto A está situado dentro de la circunferencia. El *L. G. es también la* ⊙ *que tiene por diámetro el trazo que une el punto* **A** *con el centro* **O** *de circunferencia dada.* Fig. 55.

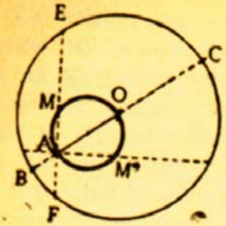


Fig. 55

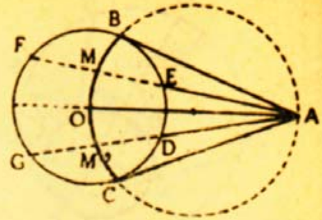


Fig. 56

3.er **CASO.**—El punto **A** está fuera del círculo. *El L. G. es la* ⊙ *descrita sobre* **OA** *como diámetro.* Pero los únicos puntos útiles son los que pertenecen al arco **BOC** comprendido entre las tangentes **AB** y **AC** trazadas desde **A** a la circunferencia dada **O**. (Fig. 56).

4.º **CASO.**—El punto A se aleja al infinito, en la dirección **OA**; *El L. G. es el diámetro perpendicular a* **OA** *en el punto* **O**; en efecto, las secantes son en este caso paralelas a **OA**. (Dibujar la figura).

Estos diversos casos se pueden resumir así:

El L. G. de los puntos medios de todas las cuerdas de una ⊙ dada **O** *y que pasan por un mismo punto dado* **A**, *es la ⊙ descrita sobre* **OA** *como diámetro.*

CAPITULO III

POSICIONES RELATIVAS DE DOS CIRCUNFERENCIAS EN UN PLANO

§1.—GENERALIDADES

Se dejó establecido en el Corol. 1º pág. 16, que por tres puntos puede pasar una sola circunferencia.

Dos ⊙s distintas **a lo más pueden tener** *dos puntos comunes.* Si tuvieran tres puntos comunes se confundirían en una sola.

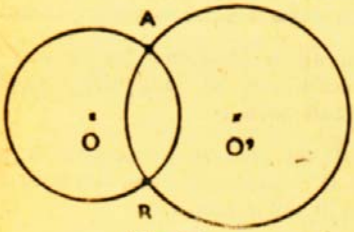


Fig. 57

Dos ⊙s *distintas* pueden tener pues:

1º Dos puntos comunes. En este caso las circunferencias reciben el nombre de *circunferencias secantes.* Fig. 57.

2º Un solo punto común. Las ⊙s reciben el nombre de *circunferencias tangentes*. El punto común P es el punto de contacto o de tangencia.

Existen dos casos:

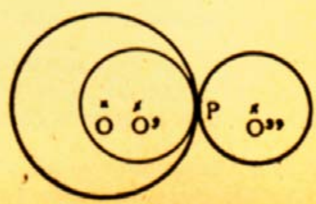


Fig. 58

a) De las dos ⊙s tangentes una está dentro de la otra:

Las ⊙s *son tangentes interiormente.* Fig. 58. Circunferencias O y O'.

b) De las dos circunferencias tangentes una está fuera de la otra: las circunferencias *son tangentes exteriormente.* Fig. 58. Circunferencias O y O".

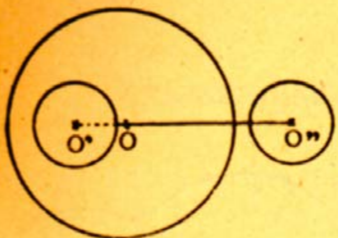


Fig. 59

3.º Las ⊙s no tienen ningún punto común.

Hay dos modos diferentes:

a) Una de las ⊙s está dentro de la otra. En este caso se dice que las ⊙s son *interiores.* En Fig. 59 las ⊙s **O** y **O'** son interiores.

b) Una de las ⊙s está totalmente fuera de la otra. Se dice que las circunferencias son *exteriores.* Fig. 59, ⊙s **O** y **O"**.

En todos los casos precedentes las dos circunferencias relacionadas tienen distintos centros: son *excéntricas.*

Circunferencias excéntricas son las que tienen distintos centros.

La recta que une los centros de dos circunferencias excéntricas se llama *línea de los centros* o *línea central.* En Fig. 59, **O O"** es la línea central.

CASO ESPECIAL: ***Las circunferencias son concéntricas.***

Circunferencias concéntricas, son las que tienen un mismo centro. **Fig. 60.**

Fig. 60

Los teoremas que siguen se refieren a la línea central y precisan la posición de los puntos comunes.

§ 2.—*CIRCUNFERENCIAS SECANTES*

TEOREMA XIV.— **La línea de los centros de dos ⊙s que se cortan, es menor que la suma de los radios y mayor que su diferencia.** Fig. 61.

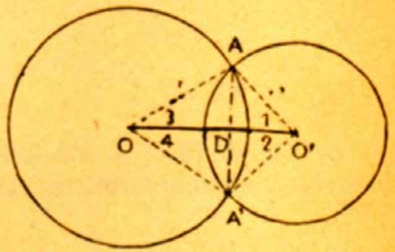


Fig. 61

Hip) O y **O'** son ⊙s que se cortan.

Tes.) $OO' < r + r'$; $OO' > r - r'$

Dem.) O (↔) **A** (↔) **O'**.

En el △ **OO'A** un lado es menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia. (Teor. 16° y 17° Geom. Omer Cano, de 3. er Año)

Luego: $\boxed{r - r' < OO' < r + r'}$ (Q. E. D.)

TEOREMA XV.—**La línea de los centros de dos $\odot$s secantes es simetral de la cuerda común y bisecta los $\sphericalangle$s del centro correspondientes a dicha cuerda. Por eso se dice que la línea de los centros es eje de simetría de dos $\odot$s excéntricas.** Fig. 61.

Dem.) $\odot$s O y O' pasan por A y A'

$\therefore$ O y O' están en la simetral de AA'. (L. G. 3, pág. 24)

Pero $\triangle$s A'AO y A'AO' son isósceles.

Luego $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 2$; $\sphericalangle 3 = \sphericalangle 4$.

§ 3.—*CIRCUNFERENCIAS ORTOGONALES*

En general, el $\sphericalangle$ **BAC**, formado por las tangentes a cada una de dos $\odot$s secantes en uno de los puntos de intersección de las $\odot$s, sea cual fuere su naturaleza, por definición, *es el ángulo de las $\odot$s secantes*. Fig. 62.

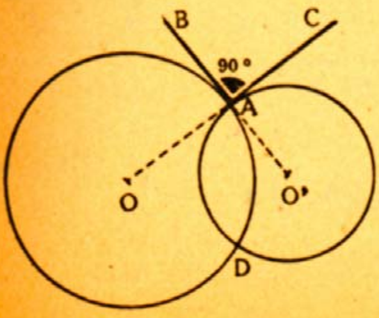


Fig. 62

Se dice que dos $\odot$s se cortan *ortogonalmente* cuando las tangentes trazadas a ambas $\odot$s en uno de los puntos comunes, forman un ángulo recto. Fig. 62. Los radios **OA** y **O'A** son perpendiculares entre sí, en **A**. ¿Por qué?

§ 4.—*CIRCUNFERENCIAS TANGENTES*

TEOREMA XV'.— **La línea de los centros de dos ⊙s tangentes exteriormente, es igual a la suma de los radios.** Fig. 63.

Tes.) $OO' = r + r'$

Dem.) El todo = a la suma de las partes:

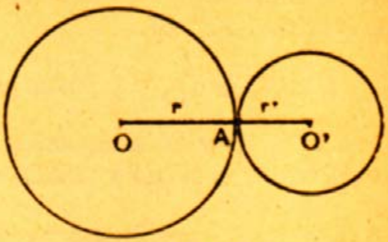


Fig. 63

$$\therefore \boxed{OO' = OA + O'A = r + r'}$$

TEOREMA XVI.— **La línea de los centros de dos ⊙s tangentes interiormente es igual a la diferencia de los radios.** Fig. 64.

Tes.) $OO' = r - r'$

Dem.) De la misma Fig. 64 se tiene directamente:

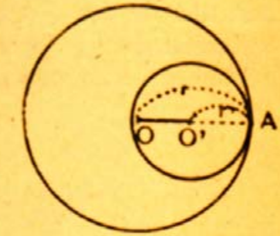


Fig. 64

$$\boxed{OO' = OA - O'A = r - r'}$$

§ 5.—*CIRCUNFERENCIAS EXTERIORES*

TEOREMA XVII.—**La línea de los centros de dos ⊙s exteriores es mayor que la suma de los radios.**

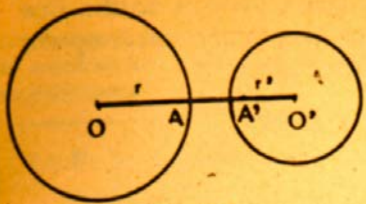


Fig. 65

Tes.) $OO' > r + r'$ Fig. 65

Dem.) $OO' = OA + AA' + A'O'$

Luego: $\boxed{OO' > OA + A'O'}$

$\boxed{OO' > r + r'}$

§ 6.—*CIRCUNFERENCIAS INTERIORES*

TEOREMA XVIII.—**La línea de los centros de dos circunferencias interiores es menor que la diferencia de los radios.**

Tes.) $OO' < r - r'$

Dem.) En la Fig. 66 se tiene:

$OO' = OA - O'A' - A'A$

Sumando al 2º miembro:

$+A'A$,

resulta mayor que el 1º.

o sea: $\boxed{OO' > r - r'}$

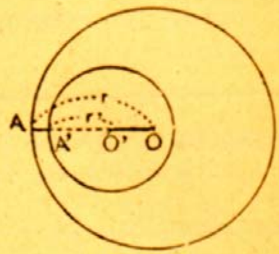


Fig. 66

CASO PARTICULAR: Si los centros **O** y **O'** *se confunden*, **OO'** = cero. Las ⊙s son *concéntricas*.

RESUMEN DE LOS DIVERSOS CASOS: Dos circunferencias distintas pueden tener una respecto de otra seis posiciones diferentes:

1.º Pueden ser *exteriores* y entonces: $OO' > r + r'$

2.º Pueden ser *tangentes exteriormente* y entonces: $OO' = r + r'$

3.º Pueden ser *secantes* y entonces: $r - r' < OO' < r + r'$

4.º Pueden ser *tangentes interiormente* y entonces: $OO' = r - r'$

5.º Pueden ser *interiores* y entonces: $OO' < r - r'$

6.º Pueden ser *concéntricas* y entonces: $OO' = o$

OBSERVACIONES: Cada una de las seis proposiciones de que se habló anteriormente, da lugar a una proposición recíproca.

Por ejemplo:

Si se tiene: $r - r' < OO' < r + r'$, las circunferencias son secantes. Fig. 61.

Demostración. — Observando el resumen que está más arriba, se puede ver que estas dos ⊙s no pueden ni excluirse, ni ser tangentes, ni ser concéntricas. Luego son secantes.

Nota: Damos a continuación el enunciado de dos proposiciones que tienen frecuente aplicación en la discusión de los problemas de construcción geométrica y que son consecuencias de lo tratado anteriormente.

1.º *Para que dos* ⊙s (o dos arcos) *se corten*, es necesario y basta que la distancia de sus centros esté comprendida entre la suma y la diferencia de sus radios.

2.º *Para que dos* ⊙s *sean tangentes*, es necesario y basta que la distancia de sus centros sea igual a la suma o a la diferencia de sus radios.

§ 7.—*CUARTO GRUPO DE Ls. Gs.* (1) *REFERENTES A LA CIRCUNFERENCIA*

L. G. 18. — *El L. G. de los centros de todas las* ⊙s *tangentes a una* ⊙ *dada* **O** *en un punto* **P** *de ella, es la recta determinada por el centro* **O** *y el punto* **P.**

Fig. 67.

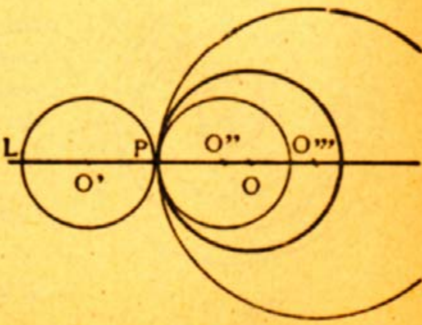


Fig. 67

---

(1) Los otros grupos de Ls. Gs. se encuentran en las páginas 23, 45 y 54.

L. G. 19.— ***El L. G. de los centros de todas las ⊙s de radio dado* r, *tangentes a una ⊙ dada de radio* R, *está compuesto de dos ⊙s concéntricas con la dada y cuyos radios son iguales a* R+r *y* R—r, *respectivamente.***

OA=OE=R; AC=EB=r.

Las ⊙s de radios **OB** y **OC** son los Ls. Gs. Fig. 68.

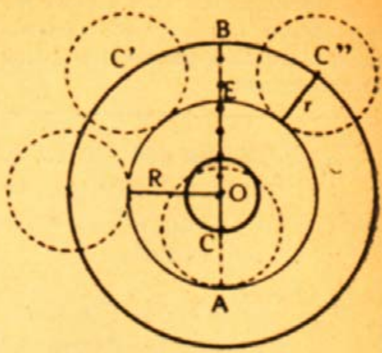


Fig. 68

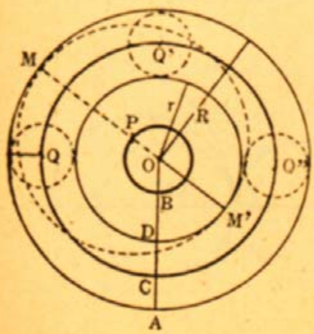


Fig. 69

L. G. 20.— ***El L. G. de los centros de todas las ⊙s tangentes a dos ⊙s concéntricas dadas de radios* R *y* r, *respectivamente, se compone de otras dos ⊙s concéntricas con las dadas, y cuyos radios son la semi-suma* $\frac{R+r}{2}$ *y la semi-diferencia* $\frac{R-r}{2}$ *de los radios de las ⊙s dadas.***

Las ⊙s. de radios **OC** y **OB** son los Ls Gs. Fig. 69.

Dem.) Sea **OA=R; OD=r.**

$$\therefore\ OC=OD+DC=r+\frac{R-r}{2}=\frac{2r+R-r}{2}=\frac{R+r}{2}$$

$$OB=\frac{R-r}{2}\ \text{(Verifíquese)}$$

¿Cuánto vale el radio de la ⊙ de centro **Q**?

OBSERVACION: Las ⊙s. cuyos centros se hallan sobre la ⊙ de radio **OB**$=\frac{R-r}{2}$, Fig. 69, son tangentes interiormente a la circunferencia de radio **R**, y tangentes envolventes de la ⊙ de radio **r**. Ejemplo: ⊙ (P, PM=PM').

El radio PM=PM'$=\frac{R+r}{2}$. (Verifíquese).

L. G. 21.—*El L. G. de los centros de las ⊙s de radio dado* **r** *que interceptan en una ⊙ dada, una cuerda de longitud dada* **c**, *está formada por dos ⊙s concéntricas con la dada y cuyos radios se determinan por la simetral de la cuerda y el radio dado* **r.**

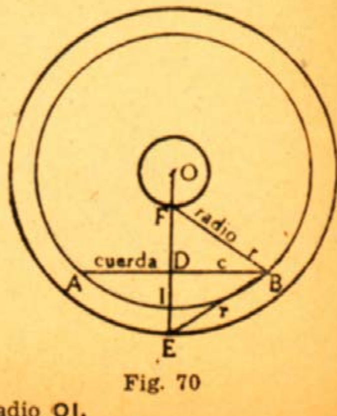


Fig. 70

Circunferencia dada = la de radio **OI.**

Las ⊙s. de radios **OE** y **OF** son los Ls. Gs. Fig. 70.

L. G. 22.— *El L. G. de los centros de las ⊙s de radio dado* **r** *que cortan una ⊙ dada bajo un diámetro, es una ⊙ concéntrica con la dada, cuyo radio es la altura de un △ isósceles que tiene por base el diámetro de la ⊙ dada, y por lado el radio dado* **r**.

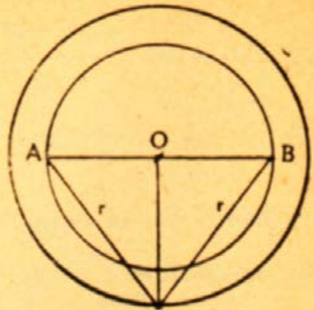


Fig. 71

El L. G. es la ⊙ de radio OC. Fig. 71.

L. G. 23.—*El L. G. de los centros de todas las ⊙s de radio dado* **r** *que cortan a una circunferencia dada* **O** *ortogonalmente, es una ⊙ concéntrica con la dada cuyo radio es la hipotenusa de un △ rectángulo que tiene por catetos el radio* **R** *de la ⊙ dada y el radio dado* **r**.

El L. G. es la ⊙ de radio **OC**. Fig. 72.

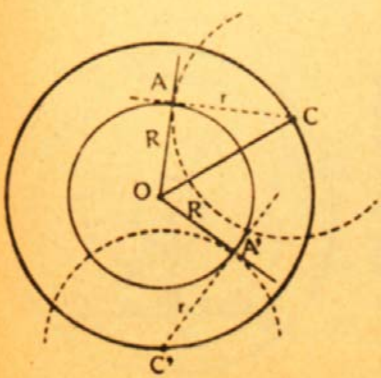


Fig. 72

OBSERVACION: Compárese el L. G. 23 con L. G. 12, pág. 54.

§ 8.—*TANGENTES COMUNES A DOS CIRCUNFERENCIAS DADAS*

Las tangentes comunes pueden ocupar dos posiciones con respecto a las circunferencias: pueden ser *exteriores* o *interiores*.

1.º La tangente común es exterior a las dos ⊙s, si ambas ⊙s quedan al mismo lado de ella.

2.º La tangente común es interior a las dos ⊙s dadas si pasa entre las dos ⊙s.

1er. CASO.—Tangentes exteriores.

PROBLEMA FUNDAMENTAL 4.º— *Construir las tangentes comunes exteriores a dos ⊙s dadas de radio* **R** *y* **r** *respectivamente.*

Análisis.—Supóngase el problema resuelto y sea CC' tang. común exterior a las ⊙s O y O'. Fig. 73.

$\therefore$ $OC \perp CC'$ y $O'C' \perp CC'$. (Teor. VII).
$\therefore$ $O'C' \parallel OC$. (Teor. 9º 3.er A. Omer Cano).
Trazar: $O'A \parallel C'C$
Resulta: CAO'C' # rectángulo.
$\therefore$ $\measuredangle OAO' = 90°$
y $AC = r$
$\therefore$ $OA = OC - AC = R - r$
$\therefore$ **La recta O'A es tang. a la ⊙ aux. (O,OA=R — r).**

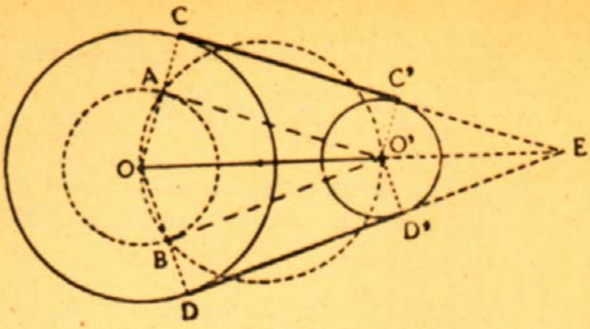


Fig. 73

Construcción.—Sean las ⊙s de radios **OC=R** y **O'C'=r,** dadas. (Fig. 73).

2.° Desde O' se trazan las tangentes O'A y O'B a ⊙ auxiliar. (Según problema 3.°, pág. 52).

3.° Se traza **OAC** y **OBD.** (Radios de contacto).

C y **D** son los puntos de tangencia de las tangentes comunes en la ⊙ de radio **R.**

4.° Con AO'=BO' se hace centro en **C** y en **D** y se corta la ⊙ **O'** en **C'** y **D'**, respectivamente.

C' y **D'** son los puntos de tangencia de las tangentes comunes en la ⊙ de radio **r.**

5.° **C**(↔)**C'** y **D**(↔)**D'.**

CC' y **DD'** son las tangentes pedidas.

Demostración.—Quedará probado que las rectas **CC' y DD'** son tangentes de las ⊙s **O** y **O'** si se logra de mostrar que son $\perp^s$ a los radios de contacto, esto es, en los puntos **C** y **C'**, **D** y **D'**. Fig. 73.

Se une **O'** con **C'**.

El cuadrilátero **CAO'C'** es un # (por tener sus lados opuestos iguales. (Omer Cano, Tomo II. Teor. 37º).

Pero $\sphericalangle A = 90°$. (O'A es tangente).

$\therefore$ el # **CAO'C'** es rectángulo.

$\therefore$ **CC'**$\perp$**OC** y **CC'**$\perp$**O'C** en **C** y **C'** respect.

Luego: **CC'** es tangente de las ⊙s **O** y **O'**.

Igualmente cuadril. **BDD'O'** es un #.

$$\sphericalangle B = \sphericalangle D = \sphericalangle D' = \sphericalangle O' = 90°$$

$\therefore$ **DD'**$\perp$**OD** y **DD'**$\perp$**O'D'** en **D** y **D'**.

Luego: **DD'** tangente común de las ⊙s **O** y **O'**.

Discusión del problema 4.º—El problema será posible siempre que del punto **O'** se puedan trazar una o dos tangentes a la ⊙ auxiliar.

Es decir, si: $\mathbf{d} \geqq \mathbf{R} - \mathbf{r}$ ($d = OO'$). Fig. 73.

1.º Si $\mathbf{d} > \mathbf{R} - \mathbf{r}$, las ⊙s dadas son exteriores, o son tangentes exteriormente, o son secantes. el problema admite 2 soluciones.

2.º Si $\mathbf{d} = \mathbf{R} - \mathbf{r}$, las ⊙s dadas son tangentes interiormente: el problema admite 1 solución.

3.º Si $\mathbf{d} < \mathbf{R} - \mathbf{r}$, las ⊙s dadas son interiores. Del punto **O'** no se puede trazar ninguna tangente a la ⊙ auxiliar: el problema es imposible.

2.º CASO.—Tangentes interiores.

PROBLEMA FUNDAMENTAL 5º.— *Contruir las tangentes comunes interiores a dos ⨀s dadas* **O** *y* **O'**.

Análisis.—Supóngase el probl. resuelto y sea

CC' tang. común interior a las ⨀s O y O'. Fig 74.
Se tendrá: radios OC || O'C'. (Teor. 9.º 3.er Año, O. Cano)

Trazar: O'A || CC' y prolónguese OC→C hasta A.

Resulta: CC'O'A ⌗ rectángulo.
∢OAO'=90°
OC=R y CA=C'O'=r
∴ OA=OC+CA=R+r
∴ La recta O'A es tang. a la ⨀ aux. (O,OA=R+r).

Construcción.—Sean las ⨀s dadas de radios **OC**=**R** y **O' C'** = **r**. Fig. 74.

1.º ⨀ auxiliar (**O**, radio=**R**+**r**).

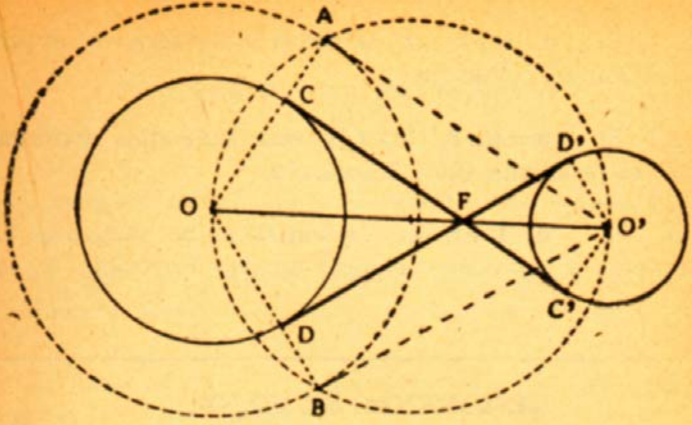
2º. Desde **O'** se trazan las tangentes **O'A** y **O'B** a la ⨀ auxiliar. (Problema 3º, pág. 52).

3.º O(↔)A (corta en C).
O(↔)B (corta en D).

C y **D** son dos puntos de tangencia de las tangentes pedidas.

4.º Con AO'=BO' se hace centro en **C** y se marca el punto **C'**; en seguida se hace centro en **D** y se marca el punto **D'**.

C' y **D'** son los otros puntos de tangencia.



5.º C(↔)C' y D(↔)D'.

CC' y **DD'** son las tangentes pedidas.

Demostración.—Se une O' con C'. El cuadrilátero **CC'O'A** es un #.

El ∢A=90° (O'A es tangente).

∴ el # **CC'O'A** es rectángulo.

∴ **CC'⊥OC** y **CC'⊥O'C'**

∴ Luego: **CC'** es tangente común de las ⊙s O y O'.

OBSERVACION: De la misma manera se demuestra que **DD'** es tangente común de O y O' considerando el paralelógramo rectángulo **DBO'D'**.

Discusión del Problema 5.º.— La condición de posibilidad es como en el problema 4.º:

d≧R+r. (d=OO').

1.° Si **d>R+r**, las $\odot$s dadas son exteriores: el problema admite 2 soluciones.

2.° Si **d=R+r**, las $\odot$s son tangentes exteriormente: el problema tiene 1 solución.

3.° Si **d<R+r**, las $\odot$s son secantes, tangentes interiormente o interiores: el problema es imposible. (0 solución.

RESUMIENDO SE TIENE:

a) Si las $\odot$s dadas son *exteriores*, se les podrá trazar 4 tangentes comunes: 2 *exteriores* y 2 *interiores;*

b) Si las $\odot$s dadas *son tangentes exteriormente*, se les podrá trazar 3 tangentes comunes: 2 exteriores y 1 interior. (Hágase el dibujo).

c) Si las $\odot$s dadas *son secantes*, se podrán trazar 2 tangentes comunes exteriores y ninguna interior. (Construirlas).

d) Si las $\odot$s dadas *son tangentes interiormente*, hay una sola tangente exterior;

e) Si las $\odot$s dadas son *interiores, no hay* ninguna tangente común.

CAPITULO IV

PUNTOS SINGULARES DEL TRIANGULO

En general, tres rectas se cortan en tres puntos. En el triángulo llama la atención de que, en diversos casos, tres rectas a él referentes (elementos secundarios del $\triangle$), se cortan en un mismo punto.

Este punto será, pues, un punto *notable o singular* del triángulo.

Puntos singulares del $\triangle$ son los puntos de concurrencia de las simetrales de sus lados, de sus bisectrices, de sus alturas y de sus transversales de gravedad.

§ 1.—SIMETRALES DE LOS LADOS DE UN TRIANGULO

Simetral de un lado de un triángulo es la perpendicular en el punto medio de un lado.

En todo triángulo hay tres simetrales que se designan por s_a, s_b, s_c, según el lado a que correspondan.

TEOREMA XIX.—**Las tres simetrales de un triángulo concurren en un mismo punto que equidista de los vértices del triángulo.**

Hip.) DO, EO, FG, son simetrales. (Fig. 75).

Tes.) 1.° DO, EO, FG, concurren en O.
2.° OB=OC=OA.

Dem.) Las simetrales de dos lados, por ejemplo de AB y BC, necesariamente se cortan en un punto **O**. (Las ⊥s a rectas concurrentes son concurrentes. Geom. Omer Cano, 3.er Año, Ejerc. 12).

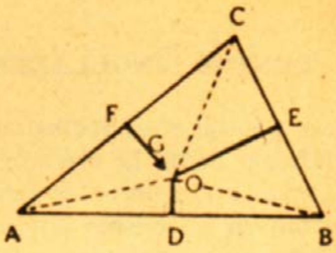


Fig. 75

Por ser **O** un punto de la simetral de **AB**

resulta: **OA = OB** (Omer cano 3.er Año, Teor. 28)
del mismo modo: **OC = OB** (O es un punto de sim. de BC)
$\therefore$ **OA = OC = OB** (Axioma: Dos cantid.)
siendo **OA = OC**

O es un punto de la simetral de **AC**. (Un punto que equidista de los extremos de un trazo pertenece a la sim.).

Luego **FG** pasa también por **O.**

Luego las tres sim. son concurrentes en **O** y este punto equidista de **A, B, y C.**

Circunferencia circunscrita a un △

El punto de concurrencia de las tres simetrales, es el centro de la ⊙ que pasa por los tres vértices del △ y que recibe el nombre de ⊙ circunscrita. Inversamente, el △ es inscrito en la ⊙.

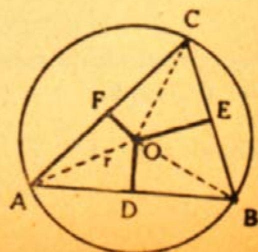


Fig. 76

El radio de la ⊙ circunscrita se designa por r. (Fig. 76).

OBSERVACIONES.—a) En el △ acutángulo el punto de concurrencia de las simetrales, o centro de la ⨀ circunscrita, cae dentro del triángulo. (Fig. 77)

b) En el △ rectángulo cae en el punto medio de la hipotenusa. (Fig. 78).

c) En el △ obtusángulo cae fuera del △. (Fig. 79).

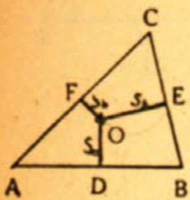


Fig. 77

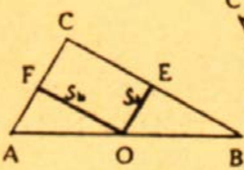


Fig. 78

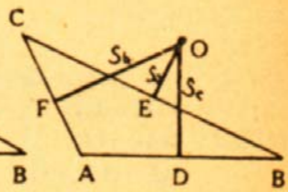


Fig. 79

d) Bastan 2 simetrales para determinar el centro de la ⨀ circunscrita.

§ 2.—*BISECTRICES*

Bisectriz de un ángulo es la recta que lo divide en dos partes iguales.

En el △ se designan por $b\alpha$, $b\beta$, $b\gamma$ según el ángulo que bisectan.

TEOREMA XX.—**Las bisectrices de los ángulos interiores de un triángulo concurren en un mismo punto que equidista de los lados del triángulo.** Fig. 80.

Hip.) **AO, BO, CO** son bisectrices.

Tes.) 1) **AO, BO, CO** concurren en **O**.
2) **OM=ON=OQ.**

Dem.) Las bisectrices de α y β necesariamente se cortan en un punto **O,** puesto que:

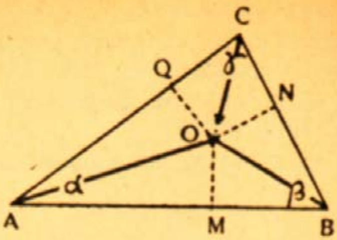


Fig. 80

$$\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}<2R.$$

Por ser O un punto de $b\alpha$

se tiene: **OM=OQ** (Teor. 30 de 3.er Año)

también: **OM=ON** (O es un punto de $b\beta$)

$\therefore$ **OQ=ON=OM** (Axioma)

Siendo **O** un punto equidistante de los lados **CA** y **CB**, según se acaba de demostrar, pertenece a la bisectriz del ángulo γ. Luego, las tres bisectrices concurren en **O.** (Teor. 31 del texto de 3.er Año de Omer Cano).

y **OM=ON=OQ**

Circunferencia inscrita a un $\triangle$.— *El punto de concurrencia* **O**, *de las tres bisectrices de los* ∢*s interiores del* $\triangle$, *es el centro de la* ⊙ *inscrita del* $\triangle$.

Esta ⊙ es tangente a los tres lados del $\triangle$ y su radio se designa por la letra griega ρ, (ro) minúscula. Bastan dos bisectrices para determinar el centro **O.** (Hágase el dibujo).

En este caso el $\triangle$ es circunscrito a la ⊙ de radio ρ.

TEOREMA REFERENTE A LAS BISECTRICES DE ANGULOS EXTERIONES

Angulo exterior de un $\triangle$ es el que está formado por un lado y la prolongación de otro lado.

TEAREMA XXI.—**Las bisectrices de dos ángulos exteriores de un △ y la del ángulo interior no adyacente a ellos, concurren en un mismo punto que equidista de un lado y de la prolongación de los otros dos.** (Fig 81).

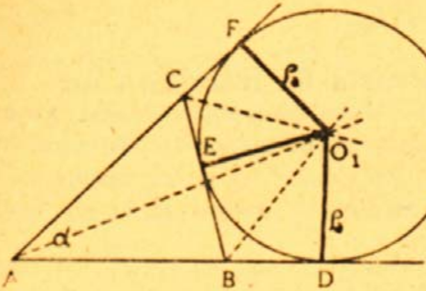


Fig. 81

Hip.) $\mathbf{BO_1}$, $\mathbf{CO_1}$ **bisec.** $\sphericalangle$s. exteriores
$\mathbf{AO_1}$, bisectriz $\sphericalangle$ int. no adyacente.

Tes.) 1) $\mathbf{BO_1}$, $\mathbf{CO_1}$, $\mathbf{AO_1}$ son concurrentes.
2) $\mathbf{O_1D=O_1E=O_1F}$.

Dem.) Las bisectrices de los $\sphericalangle$s exteriores en **B** y en **C** se cortan necesariamente en $\mathbf{O_1}$, puesto que:

$$\frac{1}{2}\sphericalangle\mathbf{BCF}+\frac{1}{2}\sphericalangle\mathbf{DBC}<180°.$$

Por pertenecer $\mathbf{O_1}$ a la bisectriz $\mathbf{BO_1}$
se tiene: $\mathbf{O_1D=O_1E}$.
Por pertenecer $\mathbf{O_1}$ a la bisectriz $\mathbf{CO_1}$
se tiene: $\mathbf{O_1F=O_1E}$.

$\therefore \qquad \mathbf{O_1D=O_1F=O_1E}$.

Resulta entonces que **O_1 es equidistante** de los lados **AF** y **AD** de α.

Luego **O_1**, pertenece a la bisectriz de α y esta bisectriz pasa también por **O_1**.

Luego la tesis.

Circunferencia Ex inscrita a un △.— *El punto de concurrencia de las bisectrices de dos ∢***s exteriores** de un △ y la del interior no *adyacente, es el centro de una ⊙ tangente a un lado del △ y a las prolongaciones de los otros dos, que reciben el nombre de ⊙ ex inscrita.*

OBSERVACIONES.—a) En todo △ se pueden construir tres ⊙s ex-inscritas:

1.° La tangente al lado **BC = a**, cuyo radio se designa por ρ_a
2.° " " " **AC = b**, " " " " ρ_b
3.° " " " **AB = c**, " " " " ρ_c

Dos bisectrices bastan para determinar el centro de la ⊙ ex-inscrita.

b) Los centros de las tres ⊙s ex-inscritas **Q_1, Q_2, Q_3** determinan un nuevo △ cuyas alturas, son las bisectrices de los ∢s interiores del primer △ ABC, prolongadas hasta los vértices respectivos,

Por ejemplo, en Fig. 82.

Q_1A es una altura del △ $Q_1\,Q_2\,Q_3$.

En efecto $Q_1A \perp Q_2Q_3$ por ser bisectrices de ángulos adyacentes suplementarios.

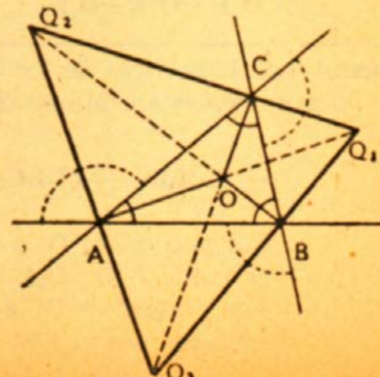


Fig. 82

§ 3.—ALTURAS DE UN TRIANGULO

Altura de un △ es la ⊥ bajada de un vértice al lado opuesto. Se designan por h_a, h_b, h_c.

TEOREMA XXII.—**Las tres alturas de un triángulo concurren en un mismo punto.** (Fig. 83).

Hip.) AE, BF, CD son alturas.
Tes.) AE, BF, CD son concurrentes.

Dem.) Por los vértices A, B y C se traza:

HI$\parallel$**CB**. Resulta **HI**$\perp$**EA**
IG$\parallel$**AC**. Resulta IG$\perp$FB
HG$\parallel$**AB**. Resulta **HG**$\perp$**CD**

También se tiene:
AI=CB. (AIBC es un #).
AH=CB (HABC es un #).

AI=AH

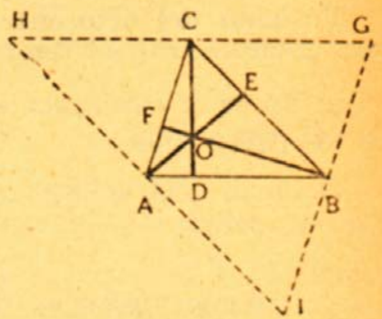


Fig. 83

Luego **A** es el punto medio de **HI**.

y **AE** es una de las simetrales del △ **IGH**.

Del mismo modo se prueba que **BF** y **CD** son las otras simetrales.

Por consiguiente, las alturas del △ **ABC**, se confunden con las simetrales del △ **IGH**.

Luego las tres alturas concurren en un mismo punto.

puesto que ya se ha demostrado que las simetrales son concurrentes.

Demuéstrese el teorema XXII, por medio de la Fig. 82. Ver observación b de la pág. 90.

El punto de concurrencia de las tres alturas de un △ se llama *ortocentro del* △.

Triángulo ortocéntrico es el que se forma uniendo los pies de las tres alturas. (Hágase el dibujo).

Posición del ortocentro.— a) En un △ acutángulo, el ortocentro está dentro del triángulo.

b) En un △ rectángulo, el ortocentro está en el vértice del ángulo recto.

c) En un △ obtusángulo, el ortocentro está fuera del triángulo, porque dos alturas caen fuera del triángulo.

§ 4.—TRANSVERSALES DE GRAVEDAD DE UN TRIANGULO

Transversal de gravedad de un △ es el trazo que une un vértice del △ con el punto medio del lado opuesto.

Se designan por t_a, t_b, t_c según sea **a, b** o **c** el lado a que correspondan.

TEOREMA XXIII.—**Las transversales de gravedad de un triángulo concurren en un mismo punto, que está situado a los 2/3 de cada una, desde los vértices respectivos y de tal modo que el segmento adyacente al lado es la mitad del segmento adyacente al vértice.** (Fig. 84).

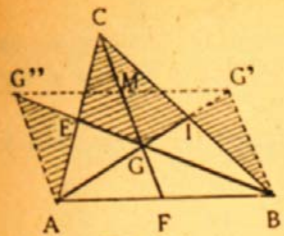


Fig. 84

Hip.) **AI, BE, CF** son transversales de gravedad.

Tes.) **AI, BE, CF** son concurrentes.

$\mathbf{AG} = \frac{2}{3}\mathbf{AI}$; $\mathbf{BG} = \frac{2}{3}\mathbf{BE}$;

$\mathbf{CG} = \frac{2}{3}\mathbf{CF}$.

Dem.) 1) Las transversales **AI** y **BE** se cortan necesariamente en G.

2) **G(↔)C.**

3) Se hace girar el △**CGI** en torno de **I** en 180°: toma la posición △**BG'I**≅△**CGI** (son simétricos).

Por consiguiente se tiene:

4) **BG'**#**GC** (¿Por qué?)

5) Del mismo modo se hace girar el △**GCE** en torno de E en 180°: toma la posición △**EG"A**≅△**GCE** (son simétricos).

Resulta también:

6) **AG"**#**GC.**

De 4 y 6 resulta:

7) **AG"**#**BG'** (Iguales, por el axioma 2 cantidades...; ||s, por el teorema: "Dos ||s a una tercera son ||s entre sí".

Entonces:

8) El cuadrilátero **ABG'G"** es un # (Por tener un par de lados iguales y paralelos).

En **G** se cortan y se dimidian sus diagonales.

Para probar que la 3ª transversal de gravedad, la correspondiente al lado **AB**, pasa por **G**,

9) Se prolonga **CG** hasta cortar **AB** en **F**.

Resulta: **AF=FB** (Por el teor. "Si por el punto medio de un lado de un △ se traza la ‖ a un lado, ésta ‖ dimidia al 3.er lado"). (1).

10) Luego **CF** es la 3ª transversal de gravedad y concurre con las otras dos en **G**.

Además se tiene:

11) $\mathbf{IG'=IG=\frac{1}{2}GG'=\frac{1}{2}AG}$, o sea que: $\mathbf{AG=\frac{2}{3}AI}$

$\mathbf{EG''=EG=\frac{1}{2}GG''=\frac{1}{2}BG}$, o sea que: $\mathbf{BG=\frac{2}{3}BE}$

$\mathbf{GF=\frac{1}{2}BG'}$ (GF=mediana △ ABG')$=\mathbf{\frac{1}{2}GC}$

o sea que: $\mathbf{CG=\frac{2}{3}CF}$.

Luego, la tesis es verdadera.

El punto de concurrencia de las transversales de gravedad de un △ se designa *centro de gravedad del triángulo.*

2.ª Demostración del teorema XXIII

Las transversales de gravedad de los lados BC y AC se cortan necesariamente en un punto **G**. (Fig. 85).

---

(1) En este caso el △ que se debe considerar es ABG'. Por G punto medio de AG', se "traza" CGF ‖ BG'.

C(↔)G

Hay que probar que **CG** prolongado dimidia **AB,** o sea que **CI** es la 3ª transversal de grav. del $\triangle$ABC.

Hágase **GF=CG**

A(↔)F(↔)B

En el $\triangle$ **CFB**

EG $\parallel$ **BF** (EG es mediana).

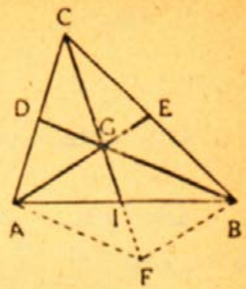


Fig. 85

También: **DG** $\parallel$ **AF** (DG es mediana del $\triangle$ CAF).

El cuadrilátero **AFBG** es un #.

Luego sus diagonales se dimidian en **I.**

Entonces **IA=IB.**

Luego **CI** es la 3ª transversal de grav. y pasa por **G.**

Además se tiene:

$$IG=\frac{1}{2}GF=\frac{1}{2}CG \text{ o sea } CG=\frac{2}{3}CI.$$

Del mismo modo se demuestra que:

$$AG=\frac{2}{3}AE$$

$$\text{y } BG=\frac{2}{3}BD$$

3.ª Demostración del teorema XXIII

Las transversales de gr. **AE** y **BD,** se cortan necesariamente en **G.**

Hágase: **FA=FG**
y **HB=HG**
D(↔)E
F(↔)H

DE ∥ **AB**; **DE**$=\frac{1}{2}$**AB**

FH ∥ **AB**; **FH**$=\frac{1}{2}$**AB**

∴ **DE#FH**

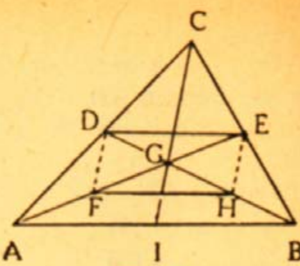


Fig. 86

Cuadrilátero **FHED** es un # por tener un par de lados iguales y ∥s (Teor. 39º, 3er. A. de Omer Cano).

Luego sus diagonales se dimidian (Teor. 42º de 3er. A).

Luego: **AF=FG=GE**$=\frac{1}{3}$**AE**

BH=HG=GD$=\frac{1}{3}$**BD**

Del mismo modo se demostraría que la transversal de gr. que parte del vértice **C** corta a **AE** en un punto G,

tal que: **GI**$=\frac{1}{3}$**CI.**

Como el punto **G** es único, las 3 transversales de gravedad concurren en **G**.

Luego, la tesis es verdadera.

* 198. Hallar sobre una recta, un punto equidistante de dos puntos dados.

199. Hallar un punto que sea el vértice común de dos triángulos isósceles cuyas bases sean dos segmento dados.

200. Hallar un punto que unido con los extremos de dos segmentos iguales dados, resulten dos triángulos congruentes.

CAPITULO V

§1.—FIGURAS RECTILINEAS INSCRITAS

Llamase *figura inscrita,* en una ⊙, aquella cuyos lados son cuerdas y sus vértices están sobre la ⊙.

La ⊙ se dice que es, en este caso, circunscrita a la figura. Su radio se designa por **r**.

Para que se pueda *circunscribir* una ⊙ *a una figura rectilínea,* ha de existir un punto que equidiste de todos sus vértices.

En virtud del teorema XIX, pág. 85, el punto de concurrencia de las simetrales de un triángulo, es equidistante de los tres vértices. *Siempre,* pues, *será posible circunscribir* una ⊙ *a un triángulo.*

§ 2.—*PROPIEDADES DEL CUADRILATERO INSCRITO*

TEOREMA XXIV.—**En todo cuadrilátero inscrito, los ángulos opuestos suman 2 R.**

Hip.) Cuadrilátero **ABCD** es inscrito. (Fig. 87).

Tes.) $\sphericalangle \mathbf{DAB} + \sphericalangle \mathbf{DCB} = 2\ \mathbf{R}.$

Dem.) $\alpha + \varepsilon = 4\ \mathbf{R}.$

$\sphericalangle \mathbf{DAB} = \frac{1}{2}\alpha$ ($\sphericalangle$ cóncavo. Teor. IX)

$\sphericalangle \mathbf{DCB} = \frac{1}{2}\varepsilon$ (áng. convexo).

$\therefore \sphericalangle \mathbf{DAB} + \sphericalangle \mathbf{DCB} = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\varepsilon = 2\ \mathbf{R}$ Se sumó m. a m.)

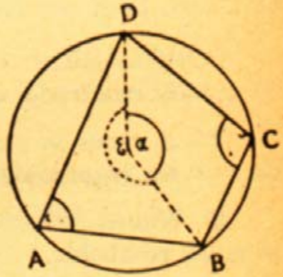


Fig. 87

TEOREMA XXV. (Recíproco del XXIV.—**Todo cuadrilátero cuyos ángulos opuestos suman 2 R, es inscriptible en una circunferencia.**

Hip.) $\alpha + \gamma = 2\ \mathbf{R}.$ (Fig. 88).

Tes.) Circunf. **O** pasa por los 4 vértices.

Dem.) Por los vértices **B, A** y **D** pasa necesariamente una circunferencia.

(Corol. a, pág. 16).

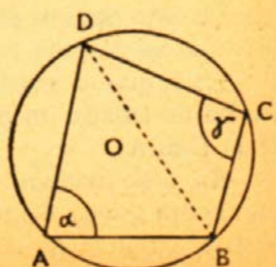


Fig. 88

El arco **BAD** es el L. G. del vértice **A.** (L. G. 9, pág. 45)

El vértice **C** debe hallarse forzosamete en el arco BCD, supletorio del arco capaz de α, porque el L. G. de los terceros vértices de los △s que tienen **BD** común y el ∢ opuesto igual a **2 R**—α es dicho arco supletorio. (L. G. 10)

Luego la ⊙ que pasa por **B, A** y **D,** pasa también por **C.** Luego pasa por los 4 vértices del cuadrilátero.

COROLARIOS: **1º. Siempre** *se puede circunscribir una* ⊙ *a todo* **cuadrado, rectángulo** *y* **trapecio isósceles.**

2º. *A* **veces** *se puede circunscribir una* ⊙ *a un* **trapecio** *y a un* **trapezoide.**

3º. Nunca *se puede circunscribir una* ⊙ *a un* **rombo** *ni a un* **romboide**.

El cuadrilátero al cual se le puede circunscribir una ⊙ *se dice que es inscriptible en dicha* ⊙.

§ 3.—FIGURAS RECTILINEAS CIRCUNSCRITAS

Figura circunscrita a una ⊙ es aquella cuyos lados son tangentes de la circunferencia.

En este caso se dice que la ⊙ es *inscrita* en la figura. Su radio se designa por ρ.

Para que se pueda inscribir una ⊙ en una figura dada, ha de existir un punto equidistante de todos los lados de la figura.

En todo triángulo se puede inscribir una ⊙, puesto que, como quedó demostrado en el teorema XX, el punto de concurrencia de las tres bisectrices de sus ángulos interiores, equidista de los tres lados del triángulo.

También se dejó dicho, pág. 90, que *a todo triángulo se le pueden ex inscribir tres circunferencias.*

Tanto los puntos de contacto de la ⊙ inscrita, como los de las ⊙s ex inscritas, determinan en el △ segmentos que, se pueden calcular en función del semiperímetro (s) y de sus lados.

§ 4.—*VALOR DE LAS TANGENTES Y SEGMENTOS DETERMINADOS POR LOS PUNTOS DE CONTACTO DE LAS ⊙s INSCRITA Y EX INSCRITAS A UN △* **ABC***, EN FUNCION DE SUS LADOS*

PROBLEMA 6º.— *Dado un △ circunscrito* **ABC**, *calcular en función de sus lados, la longitud de las tangentes que parten de un vértice del △, a la ⊙ inscrita.*

Solución.— Sea el △ ABC dado, Fig 89.

En él se conoce:

BC=a
AC=b
AB=c.

Se sabe que las tang. que parten de un punto a una ⊙ son iguales. (Teor. XIII, pág. 53).

Por consiguiente:

AI=AJ=x
BI=BH=y
CH=CJ=z.

Resulta entonces que:

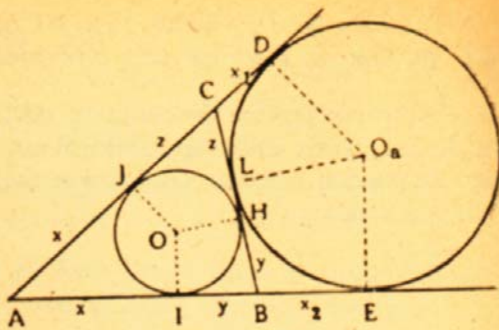


Fig. 89

$$2x+2y+2z=2\ (x+y+x)=a+b+c=2s \text{ (=perímetro)}$$

Se despeja cada incógnita en función del semi-perímetro s.

$$x=s-(y+z)=s-a=\frac{a}{2}+\frac{b}{2}+\frac{c}{2}-a=\frac{1}{2}(b+c-a)$$
$$y=s-(x+z)=s-b=\frac{a}{2}+\frac{b}{2}+\frac{c}{2}-b=\frac{1}{2}(a+c-b)$$
$$z=s-(x+y)=s-c=\frac{a}{2}+\frac{b}{2}+\frac{c}{2}-c=\frac{1}{2}(a+b-c)$$

Estos resultados se pueden enunciar así:

La longitud de la tangente que parte de un vértice de un triángulo a la circunferencia inscrita, es igual al semiperímetro del △, menos el lado opuesto al vértice respectivo.

OBSERVACION—No olvidar que s es una cantidad conocida. En efecto, si los lados del △ dado **ABC**, midieran, por ejemplo, $a=30$ cm; $b=20$ cm; $c=40$ cm.

Se tendría:

$$s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{30+20+40}{2} = \frac{90}{2} = 45 \text{ cm.}$$

En este caso, ¿cuánto valen las tangentes que parten de cada uno de los vértices del △ **ABC** a la ⨀ inscrita? Fig. 89.

PROBLEMA 7º.—*Dado un* △ **ABC**, *calcular la longitud de las tangentes que parten de un vértice del △ a la ⨀ ex inscrita tangente al lado opuesto a dicho vértice, en función de los lados del △.*

Solución.—Sea ABC el △ dado. (Fig. 90)

En él se conoce:

$BC=a$
$AC=b$
$AB=c$

Se trata de calcular la longitud de la tangente AF_1 o AD_1.

En virtud del teor. XIII, se tiene:

$CF_1=CE_1=x_1$ y
$BD_1=BE_1=x_2$

Resulta entonces que:

$$
\begin{aligned}
x_1+x_2&=a\\
AF_1&=b+x_1\\
AD_1&=c+x_2\\
\hline
AF_1+AD_1&=b+c+\underbrace{x_1+x_2}_{a}=a+b+c
\end{aligned}
$$

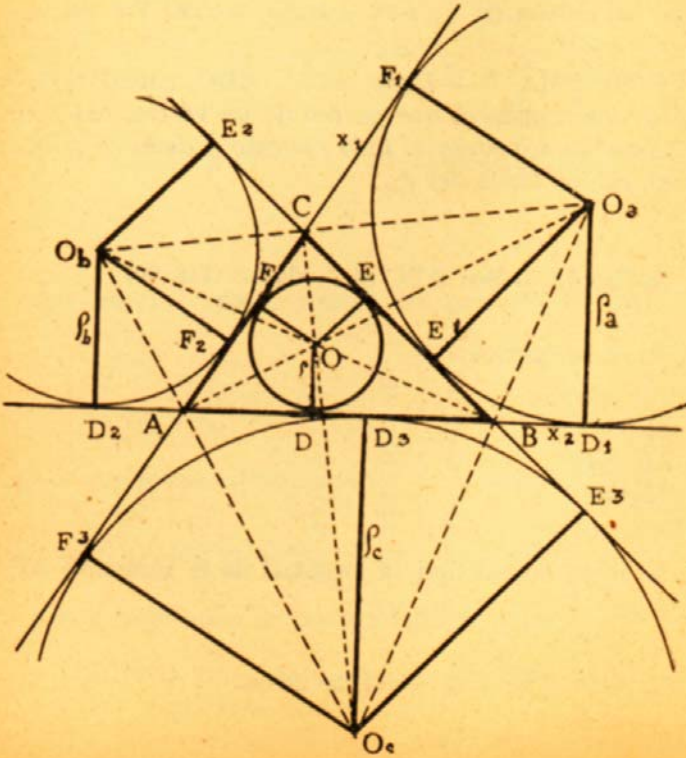


Fig. 90

Pero como $AF_1 = AD_1$ (Teor. XIII)

$$2\ AF_1 = 2\ AD_1 = a+b+c = 2\ s$$

$$AF_1 = AD_1 = \frac{a+b+c}{2} = s$$

Del mismo modo se puede obtener que:
$\mathbf{BE_2 = BD_2 = s}$ **y** $\mathbf{CF_3 = CE_3 = s}$
Resultado que se puede expresar así:

La longitud de cada una de las tangentes que parten desde un vértice de un △ ABC, a la ⊙ ex inscrita tangente al lado opuesto a ese vértice, es igual al semiperímetro del △.

§ 5.—DETERMINACION DE LOS PUNTOS DE TANGENCIA DE LAS ⊙s EX INSCRITAS A UN △ **ABC**, *CONOCIDOS EN SUS LADOS LOS PUNTOS DE CONTACTO DE LA ⊙ INSCRITA*

En la Fig. 91 se tiene sobre el lado AC:
$AF = AD = s - a = x$ (Problema 6º).
y $CF_2 = CE_2 = BE_2 - BC = s - a = x$ (Problema 7º).
Luego: $AF = CF_2 = CE_2 = s - a$
También:
$CF = CE = s - c = z$ (Problema 6º).
y $AF_2 = AD_2 = BD_2 - AB = s - c = z$
Luego $CF = AF_2 = AD_2 = s - c$

Del mismo modo resulta sobre los lados CB y AB que:

$\mathbf{BE = CE_1 = CF_1 = s - b}$ $\mathbf{AD = BD_3 = BE_3 = s - a}$

Estos resultados se pueden expresar del siguiente modo:

Si sobre un lado de un △ ABC, se aplican en orden inverso los segmentos determinados sobre este lado por el punto de contacto de la ⊙ inscrita, se obtiene el punto de contacto de la respectiva ⊙ ex inscrita.

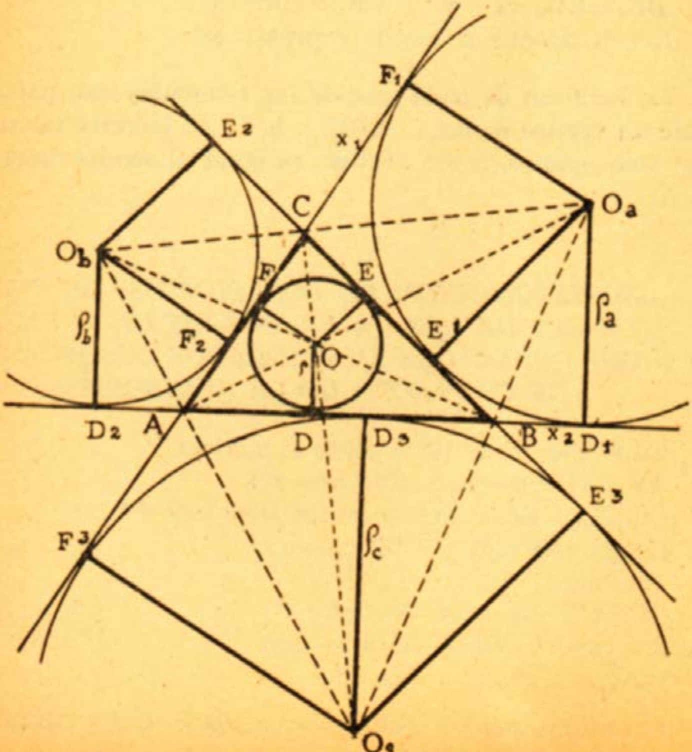


Fig. 91

OBSERVACION.—Si **F** es el punto de contacto de la ⊙ inscrita sobre el lado **AC** (Fig. 91), para tener F_2, punto de contacto de la ⊙ ex inscrita sobre **AC**, basta hacer $CF_2=AF$; los puntos de contacto E_2 y D_2 sobre las prolongaciones de los otros dos lados, se obtienen haciendo: $CE_2=CF_2$ y $AD_2=AF_2$ (Teor. XIII)

Por análogo procedimiento se obtienen los tres puntos de contacto de cada una de las otras ⊙s ex inscritas.

§ 6.—*VALOR EN FUNCION DE LOS LADOS DE LAS DISTANCIAS ENTRE LOS PUNTOS DE CONTACTO DE LA ⊙ INSCRITA EN UN △* **ABC** *Y UNA EX INSCRITA, O ENTRE LOS DE DOS EX INSCRITAS*

Sobre el lado **BC=a** se tiene: (Fig. 91)

a) **Distancias del punto de contacto de la ⊙ inscrita al de una ex inscrita:**

1.º $\mathbf{EE_2=BE_2—BE=s—(s—b)=s—s+b=b}$ (Problemas 7º y 6º).

Otro camino:

$\mathbf{EE_2=CE_2+CE=s—a+s—c=2s—a—c}$

$\mathbf{=a+b+c—a—c=b.}$ o simplemente:

$\mathbf{EE_2=CE_2+CE=x+z=b}$ (Problema 6º)

2.º $\mathbf{EE_3=CE_3—CE=s—(s—c)=s—s+c=c}$ (Probl. 7º y 6º).

Qué otro camino se podía haber seguido?

3º. $\mathbf{EE_1=BE—BE_1=s—b—(s—c)=s—b—s+c=c—b}$

Otro camino:

$\mathbf{EE_1=BC—BE_1—CE=a—2(s—c)=a—2s+2c=}$

$\mathbf{a—a—b—c+2c=c—b}$

b) **Distancias entre los puntos de contacto de dos ⊙s ex inscritas:**

1.º $E_2E_1 = BE_2 — BE_1 = s — (s — c) = s — s + c = c$

Qué otro camino se pudo haber seguido para obtener el mismo resultado?

2.º $E_1E_3 = CE_3 — CE_1 = s — (s — b) = s — s + b = b$ (Problema 7.º y 6.º).

3.º $E_2E_3 = CE_3 + CE_2 = s + s — a = 2s — a = a + b + c — a = b + c$

Por análogos procedimientos se puede obtener sobre el lado **AC=b** que:

$$\left.\begin{array}{l} FF_1 = a \\ FF_3 = c \\ FF_2 = c — a \end{array}\right\}$$ Distancias de un punto de contacto de la ⊙ insc. al de una ex insc.

$$\left.\begin{array}{l} F_2F_3 = a \\ F_2F_1 = c \\ F_1F_3 = a + c \end{array}\right\}$$ Dist. entre los puntos de contacto de dos ⊙s ex inscritas.

Sobre el lado **AB=c:**

$$\left.\begin{array}{l} DD_1 = a \\ DD_2 = b \\ DD_3 = a — b \end{array}\right\}$$ Dist. de puntos de contacto de ⊙ inscr, a una ex inscrita.

$$\left.\begin{array}{l} D_3D_2 = a \\ D_3D_1 = b \\ D_1D_2 = a + b \end{array}\right\}$$ Dist. entre puntos de contacto de dos ⊙s ex inscr.

Los resultados anteriores se pueden expresar del modo siguiente:

1.º La distancia entre los puntos de tangencia de una ⊙ inscrita y otra ex inscrita, situadas en un mismo lado de un △, es igual al lado del △ que corta dicha distancia, o, a la diferencia de los dos lados que cortan ambas prolongaciones de dicha distancia.

2.º La distancia entre dos puntos de tangencia de dos ⊙s ex inscritas, situadas en un mismo lado de un △, es igual al lado que corta la "prolongación" de dicha distancia, o a la suma de los dos lados que cortan dicha distancia.

§ 7.—PROPIEDADES DEL CUADRILATERO CIRCUNSCRITO

TEOREMA XXVI. (Teorema de Pitot)—**En todo cuadrilátero circunscrito, la suma de dos lados opuestos es igual a la suma de los otros dos.** (Fig 92.).

Hip.) **ABCD** es un cuadr. circunscr.

Tesis) $AB+DC'=AD+BC$

Dem.) Se designan por **p, q, m, n**
las tangentes que parten de los vértices del cuadrilátero.

Estas tang. son iguales de dos en dos, siendo **M, F, N** y **E** los puntos de tangencia. (Teor. XIII, Pág. 53).

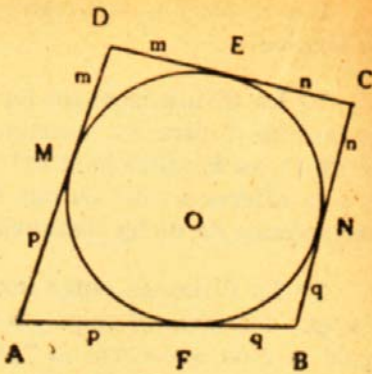


Fig. 92

Se tiene:

$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{AB}=p+q\\ \mathbf{DC}=m+n\end{array}\right\}\text{ Sumando m. a m. resulta:}$$

$$\mathbf{AB}+\mathbf{DC}=p+q+m+n$$

También:

$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{AD}=p+m\\ \mathbf{BC}=q+n\end{array}\right\}\text{Sumando resulta:}$$

$$\mathbf{AD}+\mathbf{BC}=p+q+m+n.$$

Luego: $\mathbf{AB}+\mathbf{DC}=\mathbf{AD}+\mathbf{BC}$ (Axioma . . .)

TEOREMA XXVII. (Recíproco del XXVI).— **A un cuadrilátero cuya suma de dos lados opuestos, es igual a la suma de los otros dos, se le puede inscribir una circunferencia.**

Sea la Fig. 93.

Hip.) $\mathbf{AB}+\mathbf{DC}=\mathbf{AD}+\mathbf{BC}$.

Tes.) **ABCD** es cuadr. circunscr.

1ª Dem.) (Indirecta). Siempre será posible construir una ⨀ **O** tangente a los lados AD, DC y CB.

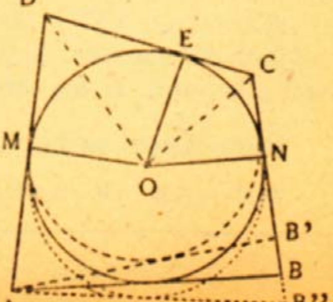


Fig. 93

No se sabe todavía si ⊙ **O** es o no tangente al cuarto lado **AB**.

Se pueden presentar 3 casos:

1.º El lado **AB** queda al exterior de la ⊙ **O**.
2.º El lado AB corta (secante) a la ⊙ **O.**
3.º El lado **AB** es tang. a la ⊙ **O**.

1.º Si el lado **AB** queda al exterior de la ⊙ **O**, tracémosle desde A una tang. AB' que cortará el lado CB en B'.

Resultará así que:

AB'+DC=AD+B'C (Teorema XXVI) (1).
Pero **AB+DC=AD+BC** (Por Hip.) (2).
Restando m. a m. ig. 1 a ig. 2, se tiene:
AB—AB' = BC—B'C
o **AB—AB' = BB'**.
Este resultado es un absurdo porque nunca, en un △, la diferencia de dos lados es igual al tercero.

2.º Si **AB** es secante de la ⊙ **O**, se le traza desde **A**, la tang. **AB"** que corta la prolongación de CB en B".

Se tendrá así:
AB"+DC=AD+B"C (Teor. XXVI).
y **AB+DC=AD+BC** (Hip.).
Restando m. a m. las dos igualdades, se tiene:
AB"—AB=B"B.
También este resultado es un absurdo.

3.º No cabe otra posibilidad que el tercer caso: el lado **AB** es tang. a la ⊙ **O**.
Luego cuadr. **ABCD** es circunscrito.

2.ª Demostración del Teorema XXVII (Directa).

Sea la Fig. 94.

Se tiene por Hipótesis que:

AD+BC=AB+DC (1).

Si **AD>AB** y cambiando AB y BC de miembro, se tiene:

AD—AB=DC—BC. (2).

Para obtener las diferencias de ambos miembros de igualdad 2, hágase: AE=AB

y CF=BC

E(↔)B

E(↔)F

F(↔)B

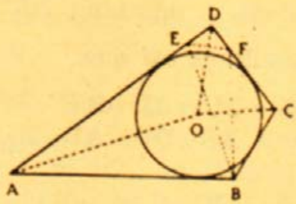


Fig. 94

Resultan los △s isósceles: **ABE, DEF y CFB.**

En estos △s las bisectrices de los ∢s de los vértices **A, D** y **C** son las ⊥ medias o simetrales de las bases: **BE, EF** y **FB** (Teor. 24. Tomo 3.er Año, Omer Cano).

Estas tres simetrales como pertenecientes al △ **EBF**, concurren en un mismo punto **O** (Teor. XIX), el cual equidista de los cuatro lados del cuadrilátero por pertenecer a las bisectrices de los ∢s en **A, D** y **C.**

Luego se puede construir una ⨀ tangente a los cuatro lados del cuadrilátero, y **ABCD** es circunscrito.

COROLARIOS: 1.º) **Siempre** *se puede inscribir una circunferencia en un cuadrado y en un rombo. El centro de la ⨀ inscrita es la intersección de las diagonales.*

Ls. Gs. para **C** $\begin{cases} 1.^{\circ} \odot\ (O,\ r) \\ 2.^{\circ} \odot\ (D = \text{punto medio de } AB,\ t_c) \end{cases}$

Construcción.—

$\sphericalangle$ **AOB=2γ**

AO=OB=**r**

A(↔)B

Se hace: DA=DB

$\odot$ (O, r)

$\odot$ (D, t_c)

A(↔)C(↔)B.

ABC △ pedido.

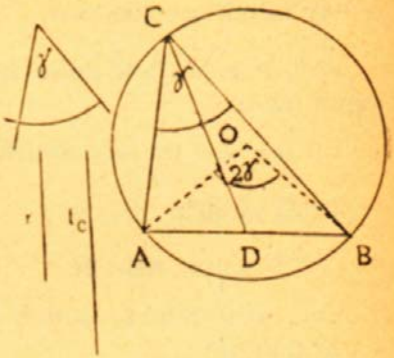


Fig. 96

Demostración.—(Véase Fig. 96).

$\sphericalangle AOB = 2\,\gamma$ (Por construcción).

$\sphericalangle ACB = \dfrac{1}{2} \sphericalangle AOB = \gamma$ (Teor. IX)

$OA = OB = \mathbf{r}$ (Por constr.).

$DC = \mathbf{t}_c$ (Por constr.).

Luego el △ **ABC** cumple con los datos o condiciones impuestas.

Discusión.— (Fig. 96)

1.º Si $\gamma = 90°$.

El $\sphericalangle$**AOB**=un $\sphericalangle$ extendido.

Los 3 vértices del △ AOB quedan situados en línea recta.

$AB = c = 2\ r$

Cuanto $t_c = r$, la ⊙ con radio t_c corta la ⊙ de radio **r** en infinitos puntos, puesto que ambas ⊙s coinciden Luego, hay infinitas soluciones.

Si $t_c \gtrless r$, la ⊙ de radio t_c no corta la ⊙ de radio **r** en ningún punto.

En tal caso no hay solución.

2.º Si $\gamma \neq 90°$.

Resulta: $AB < 2r$.

La ⊙ con radio t_c corta a la ⊙ de radio **r** en 2, 1 o en ningún punto.

Luego puede haber 2, 1 ó 0 soluciones.

ALGUNAS INDICACIONES

En la construcción de figuras inscritas, téngase en cuenta que:

a) En un △ inscrito en una ⊙, son elementos dependientes uno de los otros: *un lado, el ∢ opuesto a este lado, y el radio* **r** *de la* ⊙ circunscrita. Estos tres elementos forman lo que se llama "**un datum**". Con dos de ellos se puede conocer el tercero. Así:

1.º Conociendo **r** y α, se puede determinar el lado **a**.

2.º Conociendo **r** y **a**, se puede determinar el áng. α.

3.º Conociendo α y **a**, se puede determinar el radio **r** de la ⊙ circunscrita. (En este último caso bastaría construir el arco capaz de α sobre a según problema fundamental 2º Pág. 43).

¿Qué elemento nuevo se puede obtener conociendo **c** y **r**? ¿Con **r** y γ? ¿Con **r** y β? (Fig. 97).

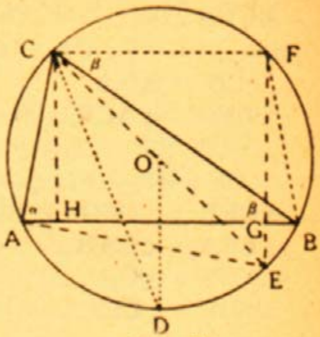


Fig. 97

b) Trazando la altura **CH** y el diámetro **CE**, (Fig. 97), y uniendo **A** con **E**, resulta:

$\sphericalangle$**CAE**$=$**90º**. (Teor. IX, Corol. 4).
$\sphericalangle$**ECB**$=\sphericalangle$**EAB**$=\sphericalangle$**ACH**$=90°-\alpha$ (Teor. IX, Corol. 1 y 4).
$\sphericalangle$**HCE**$=\sphericalangle(r, h_c) = \gamma-$ ($\sphericalangle$**ACH**$+\sphericalangle$**ECB**) $=\gamma-(90°-\alpha+90°-\alpha)=\gamma-(180°-2\alpha)=\gamma-(\alpha+\beta+\gamma-2\alpha)=\alpha-\beta$

c) La bisectriz **CD**$=$**b**$_\gamma$, del ángulo γ lo es también del $\sphericalangle$**HCE**, puesto que $\sphericalangle$**ACH**$=\sphericalangle$**BCE**.

$$\therefore \qquad \sphericalangle \mathbf{HCD} = \sphericalangle (\mathbf{h}_c, \mathbf{b}_\gamma) = \frac{\alpha-\beta}{2}$$

También la bisectriz **CD**, dimidia el arco **ADB**. (Corol. 5.º, pág. 37).

Uniendo **O** con **D**, resulta: $\sphericalangle$**DOE**$=2\sphericalangle$**DCE**$=\sphericalangle$**HCE** $=\alpha-\beta$.

Construcción.—(Fig. 99).

$\sphericalangle$ **ODB** $=90°$.

DO $=\rho$

$\sphericalangle$ **DOB** $=90°-\dfrac{\beta}{2}$

$\odot$ (**O**, ρ)

Se prolonga **BD**$\to$**D**.

Se traza tangente **AEC**;

Se traza tangente **BFC**;

ABC $\triangle$ pedido.

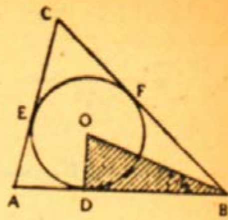


Fig. 99

OBSERVACION.—Hágase la demostración y discusión.

ALGUNAS INDICACIONES PARA LA CONSTRUCCION DE FIGURAS CIRCUNSCRITAS (Fig. 100)

En el $\triangle$ circunscrito **ABC**, únase O con los tres vértices y los puntos de tangencia.

Las rectas **OA**, **OB** y **OC** son las bisectrices b_α, b_β y b_γ respectivamente y **OD**$=$ **OE**$=$**OF**$=\rho$

En el $\triangle$**AOB** se tiene:

$$\sphericalangle \mathbf{OAB}=\frac{1}{2}\alpha$$

$$\sphericalangle \mathbf{OBA}=\frac{1}{2}\beta$$

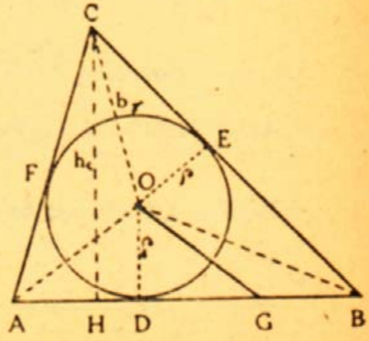


Fig. 100

$$\sphericalangle \mathbf{AOB}=180°-\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}=\alpha+\beta+\gamma-\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}=$$

$$\underbrace{\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}}_{90^\circ}+\frac{\gamma}{2}=90^\circ+\frac{\gamma}{2}$$

$$\mathbf{AD=AF}=\mathbf{s—a}=\frac{1}{2}\,(\mathbf{b+c—a})$$ (Probl. fund. 6°, pág. 103)

$$\mathbf{BD=BE}=\mathbf{s—b}=\frac{1}{2}\,(\mathbf{a+c—b})$$ (Probl. fund. 6°)

Haciendo **OG = OA**

Resulta: **DG = DA.**

$$\mathbf{BG}=\mathbf{BD—DA}=\mathbf{s—b—(s—a)}=\frac{1}{2}(\mathbf{a+c—b})\;—$$
$$\frac{1}{2}\,(\mathbf{b+c—a})=\mathbf{a—b}$$

En el $\triangle$ isósceles **AOG** se tiene:

$$\sphericalangle\mathbf{AOG}=180^\circ — (\sphericalangle\mathbf{OAG}+\sphericalangle\mathbf{OGA})=180^\circ—\alpha=\beta+\gamma$$

$$\sphericalangle\mathbf{BOG}=\sphericalangle\mathbf{AOB}—\sphericalangle\mathbf{AOG}=90^\circ+\frac{\gamma}{2}—\;(\beta+\gamma)=$$

$$\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}+\frac{\gamma}{2}—\beta—\gamma=\frac{\alpha}{2}—\frac{\beta}{2}=\frac{\alpha—\beta}{2}$$

$$\therefore\;\sphericalangle\mathbf{BOG}=\sphericalangle\mathbf{HCO}=\sphericalangle(\mathbf{h_c},\,\mathbf{b_\gamma})$$ (Pág. 119, letra c.)

Si se conoce **CH**$=h_c$, el lado **AB** es tangente a la $\odot$ $(\mathbf{C},\,\mathbf{h_c})$.

INDICACIONES PARA LA CONSTRUCCION DE TRAPECIOS

En el trapecio **ABCD trácese CE**$\|$**DA,** fig. 101. Resulta $\triangle$ **CEB**, en el cual se tiene:

CE = DA = d

BC = b

EB = a—c

$\sphericalangle$ **CEB** $= \alpha$

$\sphericalangle$ **EBC** $= \beta$

$\sphericalangle$ **ECB** $= \gamma - \alpha$

CH = h (común al $\triangle$ y al trapecio).

BH = proyección del lado **b**

EH = proyección del lado **d**

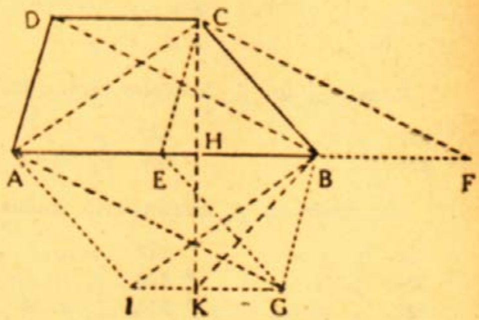


Fig. 101

Trazando por **C, CF**$\|$**DB** y prolongando **AB** hasta su intersección con **CF**, se tiene en el $\triangle$ **ACF:**

AF = a + c

AC = e

CF = f

$\sphericalangle$ **ACF** $= \varepsilon$

CH = h

Trazando **BG**$\|$**DA**

BI$\|$**CA**

AG$\|$**DB**

AI$\|$**CB** y finalmente **IG**, se obtiene el trapecio **BAIG** $\cong$ trap. **ABCD.**

Luego: **HK = HC**

$\sphericalangle$ **HBK** $= \sphericalangle$ **HBC** $= \beta$

$\sphericalangle$ **KBG** $= \alpha - \beta$

CAPITULO VI

EQUIVALENCIA, TRANSFORMACION, DIVISION Y MULTIPLICACION DE AREAS DE LAS FIGURAS PLANAS

I.—EQUIVALENCIA DE AREAS

§ 1.—*NOCIONES GENERALES*

En el lenguaje corriente se confunden, ordinariamente, los términos *superficie* y *área*. Sin embargo, tienen diferente significado.

Superficie de una figura es la porción del plano encerrada por el perímetro de esta figura, sin medir.

Area es la medida de la superficie. Con más precisión, área es el número que expresa la relación de la superficie de una figura con la unidad de superficie.

Si dos figuras sobrepuestas coinciden en toda su extensión se dice que son *congruentes*.

Dos figuras congruentes tienen igual *área* y la misma *forma*. El signo de congruencia es: $\cong$. Se debe leer **congruente con.**

Figuras equivalentes son las que tienen igual área, pero sin tener necesariamente la misma forma.

Dos figuras congruentes son siempre *equivalentes*, pero, no siempre dos figuras equivalentes serán congruentes.

Así un cuadrado que mide 6 m por lado, es equivalente a un rectángulo que mide 9 m de largo por 4 m de ancho, porque ambas figuras tienen 36 m^2 de área. Sin embargo, dichas figuras no son congruentes.

Si dos figuras se componen de partes congruentes, aunque dispuestas de distinto modo, es evidente que resulten equivalentes.

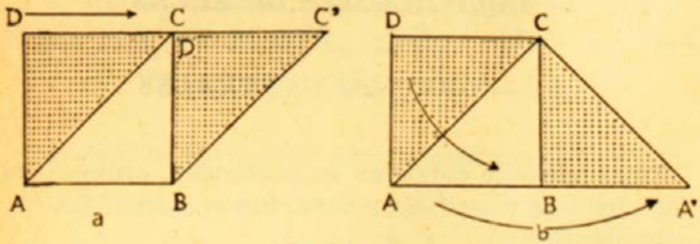


Fig. 103

Esta propiedad se puede comprobar, dividiendo el cuadrado **ABCD**, (Fig. 103a), en dos △s rectángulos por la diagonal **AC.**

Si se traslada el △ **ACD** en la dirección de la recta **DC,** permaneciendo fijo **ABC,** hasta que **DA** coincida con **CB,** el cuadrado **ABCD** se ha transformado en el romboide equivalente **CABC'**.

Haciendo girar el △ **ACD** en torno del punto **C** (fig. 103b) hasta que **CD** coincida con **CB,** resulta el △ isósceles **AA'C,** equivalente, también, con el cuadrado **ABCD.**

En ambos casos las figuras equivalentes están conpuestas de partes congruentes.

§ 2.—TEOREMAS REFERENTES A EQUIVALENCIA DE PARALELOGRAMOS, TRIANGULOS Y TRAPECIOS.

TEOREMA XXVIII.—**Dos paralelógramos de igual base e igual altura, son equivalentes.**

Hip.) #s **ABCD** y **ABEF** tienen igual base **AB** e igual altura **h** (dist. ||s). Fig. 104

Tes.) #**ABCD** = #**ABEF**

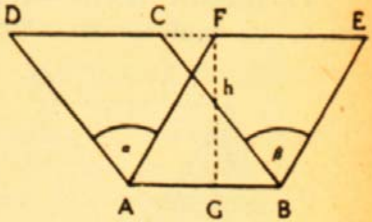


Fig. 104

Dem.) Si se sobreponen los dos #s de modo que coincidan sus bases iguales **AB**, resulta el trapecio **ABED**.

$\triangle$**CBE** $\cong$ $\triangle$**DAF** (2.º Caso).

En efecto, tienen:

BC = **AD** (lados op. de un #).

BE = AF id.

$\beta = \alpha$ (lados resp. ||s.)

Entonces se tiene:

Trap. **ABED** = Trap. **ABED**

$\triangle$ **CBE** = $\triangle$ **DAF**

Trap. ABED — $\triangle$CBE = Trap. ABED — $\triangle$DAF (Restando m. a m.)

Luego: #**ABCD** = #**ABEF** (Q. E. D.)

COROLARIO.—*Un $\triangle$ es equivalente a la mitad de un # que tenga igual base e igual altura.*

Demostración.—Se traza una diagonal del #.

El # queda así dividido en dos △s que tienen la misma base y altura que el #.

Los dos △s son congruentes (Teor. 36.º, Tomo II, de Omer Cano) y por lo tanto equivalentes entre sí.

Luego cada uno de los △s es equivalente a la mitad del #.

TEOREMA XXIX.—**Dos triángulos de igual base y altura son equivalentes.** (Fig. 105).

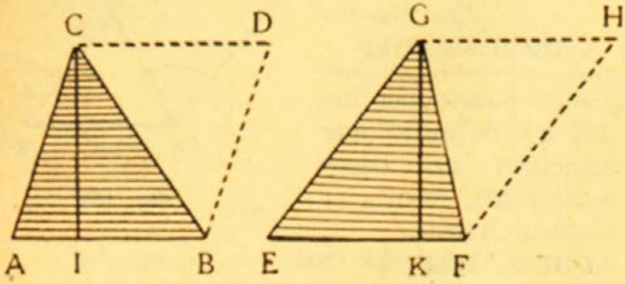


Fig. 105

$$\textbf{Hip.)} \left\{ \begin{array}{ll} AB = EF & \text{(bases)} \\ CI = GK & \text{(alturas)} \end{array} \right.$$

Tes.) $\triangle \mathbf{ABC} = \triangle \mathbf{EFG}$

Dem.) En los △s ABC y EFG
complétense los #s.

Resulta: $\# \mathbf{ABDC} = \# \mathbf{EFHG}$ (Teor. XXVIII)

$$\triangle \mathbf{ABC} = \frac{1}{2} \# \mathbf{ABCD} \quad \text{(Corolario Teor. XXVIII).}$$

$$\triangle \mathbf{EFG} = \frac{1}{2} \# \mathbf{EFHG} \quad \text{(Corolario Teor. XXVIII).}$$

Luego $\triangle$**ABC**$=\triangle$**EFG** (Por ser mitades de #s. equivalentes).

Del teorema XXIX se desprende el L. G. siguiente:

L. G. 24.—*El L. G. de los terceros vértices de todos los $\triangle$s equivalentes que tienen la base* **AB** *común, está formado por dos* ||*s trazadas a ambos lados de* **AB** *a una distancia* **h** *(altura de los $\triangle$s).*

§ 3.—*PARALELOGRAMOS COMPLEMENTARIOS*

Paralelógramos complementarios son los que resultan al trazar por un punto de una diagonal de un #, las ||*s a los lados y que no están atravesados por la diagonal.*

Los #s **P** y **Q** son complementarios. (Fig. 106).

TEOREMA XXX.—**Dos paralelógramos complementarios son equivalentes.** (Teorema del gnomon).

Hip.) **P** y **Q** #s complementarios.

Tes.) **P=Q**

Dem.)

$\triangle$**ABC**$\cong\triangle$**CDA** (1)

$\triangle$**GFC**$\cong\triangle$**CHG** (2)

$\triangle$**AIG**$\cong\triangle$**GEA** (3)

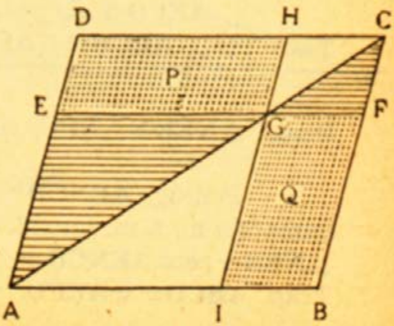


Fig. 106

Si a la 1.ª igualdad se resta m. a m. la suma de los $\triangle$s de las dos últimas igualdades se tiene que:

#**P**$=$ #**Q**

OBSERVACION.—El teorema anterior es un caso especial de paralelógramos equivalentes, que no tienen iguales ni la base, ni la altura.

TEOREMA XXXI.—**Un trapecio es equivalente a un paralelógramo que tiene la misma altura y por base la mediana del trapecio.** (Fig.107).

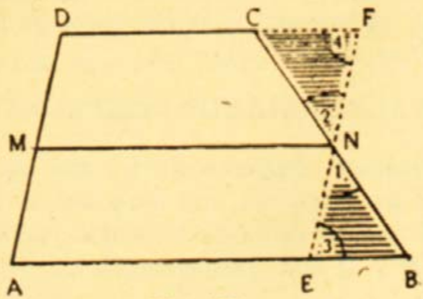


Fig. 107

$$\text{Hip.})\ \left\{\begin{array}{l} \mathbf{ABCD}=\text{trapecio} \\ \mathbf{MN}=\text{mediana} \\ \mathbf{AEFD}\#\ \text{de base}\ \mathbf{MN}. \end{array}\right.$$

Tes.) Trap. **ABCD** = # **AEFD**

$$\text{Dem.})\ \triangle \mathbf{NEB} \cong \triangle \mathbf{NFC},\ \text{tienen:}\ \left\{\begin{array}{l} \measuredangle 1=\measuredangle 2 \\ \measuredangle 3=\measuredangle 4 \\ NB=NC \end{array}\right.$$

Pentág. **AENCD** = pent. **AENCD.**

Sumando m. a m. iguald. anteriores resulta:

$\triangle$**NEB** + pent.**AENCD** = $\triangle$**NFC** + pent.**AENCD**

Trap. **ABCD** = # **AEFD.** (Q. E. D.)

TEOREMA XXXII.—**Un trapecio es equivalente a un $\triangle$ que tiene la misma altura y cuya base es la suma de las bases del trapecio.** (Fig. 108).

Hip.) **AF = AB + DC**
Tes.) Trap. **ABCD =**
△AFD

Dem.) **ABED = ABED** (común a las dos Fig.)
△ECD ≅ △EBF
(tienen: ∢1 = ∢2;
∢3 = ∢4; **DC = BF**

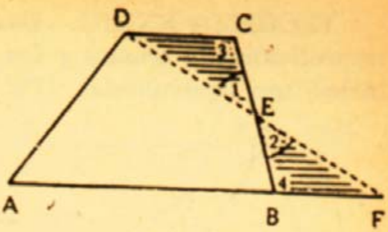


Fig. 108

Sumando m. a m. las 2 iguald. anteriores se tiene:
ABED + △ECD = ABED + △EBF.
Trap. **ABCD = △AFD.**

2.ª Demostración del Teorema XXXII

Se traza la diagonal **DB.**

Se traza: CF ∥ DB

Se prolonga AB hasta F
F(↔)D

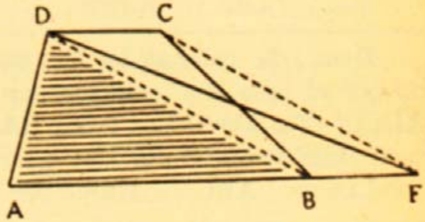


Fig. 109

Resulta: BF = DC ¿Por qué?
∴ AF = AB + DC

Entonces se tiene:
△ABD = △ABD (Parte común del trap. y del △).
△DBC = △DBF (Igual base y misma alt.: dist. entre las ∥s)
∴ **△ABD + △DBC = △ABD + △DBF** (Sumando m. a m.)
Luego Trap. **ABCD = △AFD.**

TEOREMA XXXIII.—**Dos △s. que tienen dos lados respectivamente iguales y los ∢s comprendidos suplementarios, son equivalentes.** (Fig. 110).

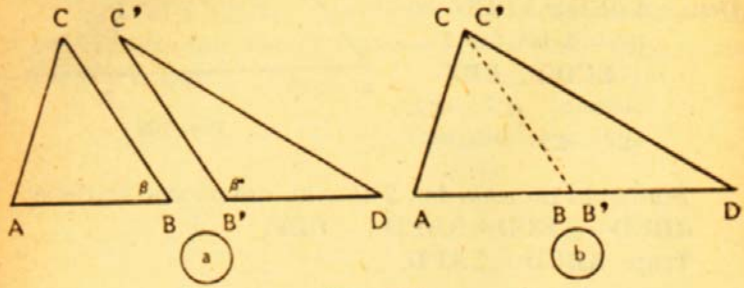


Fig. 110

Hip.) **AB = B'D; BC = B'C'**

$\beta + \beta' = 180°$

Tes.) △**ABC** = △**B'DC'**

Dem.) Se colocan los △s uno al lado de otro, de modo que el lado **B'C'** coincida con **BC**. Tendrán la posición: **ADCC'** (Fig. 110b). Los lados **BA** y **B'D** quedarán en línea recta, puesto que β y β' son ∢s adyacentes suplementarios.

Luego △**ABC** = △**B'DC'** por tener igual base y altura.

§ 4.—*PROYECCIONES DE UN TRAZO SOBRE UNA RECTA*

La proyección de un trazo sobre una recta, es la parte *de esta recta comprendida entre los pies de las ⊥ bajadas desde los extremos del trazo a la recta.* (Fig. 111).

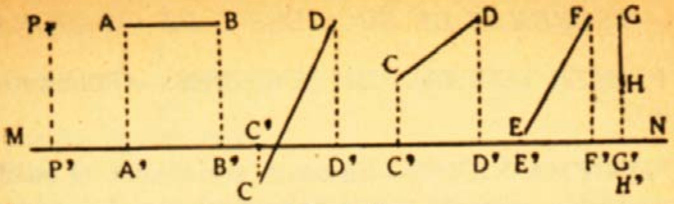


Fig. 111

La recta sobre la cual se proyecta el trazo, es el *eje de proyección*. En la Fig. 111, **MN** es el eje de proyección.

Las ⊥s trazadas a él desde los extremos del trazo, son las *rectas de proyección* o *rectas proyectantes*.

La *proyección de un punto sobre una recta*, es otro punto, o sea, el pie de la ⊥ bajada del punto a la recta. **P'** es la proyección de P. (Fig. 111).

Si el trazo proyectado es paralelo al eje, la proyección, es igual al trazo: **A'B'=AB**.

Si el trazo es convergente con el eje, la proyección es menor que el trazo: **C'D'>CD**.

Si un extremo del trazo coincide con el eje, este punto extremo coincide con su proyección: trazo **EF**.

Si el trazo es ⊥ al eje, su proyección se reduce a un punto: trazo **HG**.

En un △ rectángulo, un cateto es la proyección de la hipotenusa sobre la recta cuya dirección es determinada por este mismo cateto.

§ 5.—TEOREMAS DE EUCLIDES Y DE PITAGORAS

PRIMER TEOREMA DE EUCLIDES.—(Referente al cateto).

TEOREMA XXXIV.—**En un △ rectángulo, el cuadrado construido sobre un cateto es equivalente al rectángulo formado por la hipotenusa entera y la proyección del mismo cateto sobre ella.** (Fig. 112).

Hip.) △ **ABC** rectángulo en C $\begin{cases} \mathbf{ABC=c;\ DB=p;\ DA=q} \\ \mathbf{BC=a} \\ \mathbf{AC=b} \end{cases}$

Tes.) □ **BEFC** = ▭ **BIHD** o sea, $\mathbf{a^2=cp}$.

Dem.) **A(↔)E** y **C(↔)I**

En los △s **BEA** y **BCI** se tiene:

BE=BC

BA=BI

∢ABE=∢CBI (lados resp. $\perp$s)

△BEA≅△BCI (2º caso)

$\mathbf{\triangle BEA} = \dfrac{1}{2}\ \#\mathbf{BEFC}$ (Misma base BE e igual alt. **AG**=**FE**=dist. $\|$s).

C(↔)I

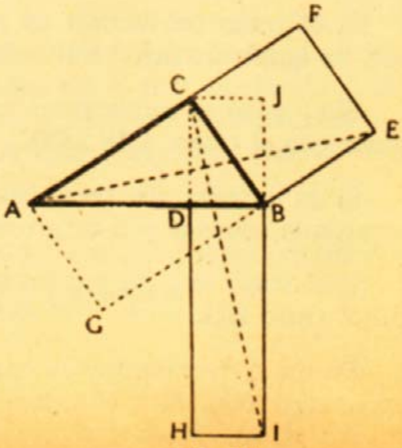


Fig. 112

$\triangle \mathbf{BCI} = \frac{1}{2} \# \mathbf{BIHD}$ (Misma base BI e igual altura CJ=HI)

$\therefore \frac{1}{2} \# \mathbf{BEFC} = \frac{1}{2} \# \mathbf{BIHD}$

Luego, #s enteros:

BEFC=BIHD, o lo que es lo mismo: $\mathbf{a^2=cp}$.

Del mismo modo se demuestra que: $\mathbf{b^2=cq}$.

2.º TEOREMA DE EUCLIDES (Referente a la altura).

TEOREMA XXXV.—**En un △ rectángulo, el cuadrado construido sobre la altura es equivalente al rectángulo que tiene por lados las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa.** (Fig. 113).

Hip.) △ **ABC** rectángulo en C; $\mathbf{CD=h_c}$ (alt.)

AD=q; DB=p.

Tes.) $\mathbf{h_c^2=q.\ p}$.

Dem.) Se construye el □ **EDCF** sobre $\mathbf{CD=h_c}$.

Se prolongan EF y BC hasta su intersección **H.**

Se traza: BI⊥BE y se completa el ▭ **EBIH.**

Se prolongan **FC** hasta **N** y **DC** hasta **M.**

□EDCF=▭CNIM

(son #s, complem.)

△CAD≅△HCM.

En efecto, tienen:

CD=HM

∢1=∢2

(lados respectiv. ⊥s)

∢D=∢M=90°

Luego: AD=CM=**q**

Además: **DB=CN=p.**

(lados opuestos de un #)

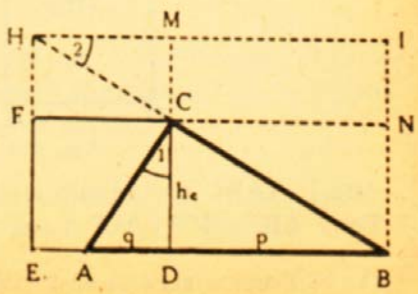


Fig. 113

En consecuencia, los lados del rectángulo **CNIM** son las proyecciones **p** y **q** de los catetos del △ rect. **ABC.**

Luego: □**EDCF** = ▭**CNIM,**

o sea: $h_c^2 = q\ p.$ (Q. E. D.).

TEOREMA DE PITAGORAS (El particular) (1)

TEOREMA XXXVI.—**En un △ rectángulo, el cuadrado construido sobre la hipotenusa es equivalente a la suma de los cuadrados construidos sobre los catetos.** (Fig. 114).

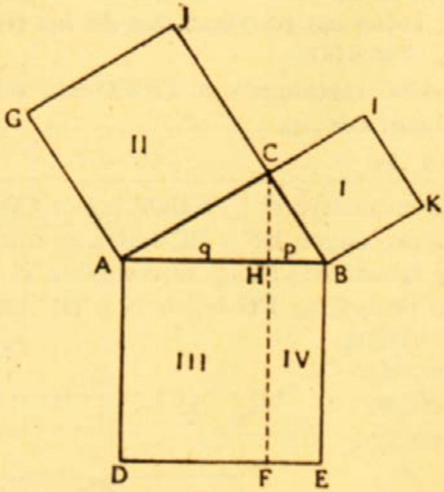


Fig. 114

Hip.) △**ABC** rectángulo en **C.**

Tes.) $\mathbf{AB^2 = BC^2 + AC^2}$ o sea: $\mathbf{c^2 = a^2 + b^2}$

---

(1) El teorema general de Pitágoras pertenece al programa de 5.º Año.

Dem.) Se traza: **CH⊥AB** y se prolonga hasta **F.**

Resulta: ▭**IV**=□**I** (1.er Teor. de Euclides)

▭III=□II (1.er Teor. de Euclides)

∴ ▭s **IV+III**=□s **I+II** (Sumando m. a m.)

Luego: $\mathbf{AB^2=BC^2+AC^2}$,

o sea: $\mathbf{c^2 = a^2 + b^2}$.

DEMOSTRACION ALGEBRAICA DEL TEOREMA XXXVI

Se hace CH⊥AB y se prolonga hasta F. (Fig. 114).

Los lados y proyecciones del △ se designan según se acostumbra.

Aplicando el 1.er teorema de Euclides (referente al cateto) resulta:

$$\mathbf{a^2=cp}$$
$$\mathbf{b^2=cq}$$

∴ $\mathbf{a^2+b^2=c\ (p+q)}$ Sumando y sacando factor común

$$\mathbf{a^2+b^2=c \cdot c}$$

Luego: $\mathbf{a^2+b^2=c^2}$ (Q.E.D.)

COROLARIOS: 1.º *En un △ rectángulo, el cuadrado de un cateto, es equivalente al cuadrado de la hipotenusa menos el cuadrado del otro cateto.*

1) $\mathbf{a^2=c^2-b^2}$

1) $\mathbf{b^2=c^2-a^2}$

2.º*En un △ rectángulo, el cuadrado construído sobre un cateto, es equivalente al rectángulo que tiene por la-*

dos, respectivamente, la suma y la diferencia de la hipotenusa y el otro cateto.

1) $\mathbf{a^2 = c^2 - b^2 = (c+b)\ (c-b)}$
2) $\mathbf{b^2 = c^2 - a^2 = (c+a)\ (c-a)}$

3.º *En un △ rectángulo, la hipotenusa es igual a la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de los catetos, y un cateto es igual a la raíz cuadrada de la diferencia entre el cuadrado de la hipotenusa y el cuadrado del otro cateto.*

1) $\mathbf{c = \sqrt{a^2 + b^2}}$

2) $\mathbf{a = \sqrt{c^2 - b^2}}$

3) $\mathbf{b = \sqrt{c^2 - a^2}}$

TEOREMA XXXVII.— (Recíproco del de Pitágoras).— **Si en un △ el cuadrado construido sobre un lado es equivalente a la suma de los cuadrados construidos sobre los otros dos, el △ es rectángulo.** (Fig. 115).

Hip.) $\mathbf{AB^2 = AC^2 + BC^2}$
Tes.) **ABC** es △ rectángulo en C.

Dem.) Se traza: $\mathbf{CD \perp BC}$ en **C.**

se hace: $\mathbf{CD = AC}$.

Resulta entonces: $\mathbf{BD^2 = DC^2 + BC^2}$

Por Hipótesis: $\mathbf{AB^2 = AC^2 + BC^2}$

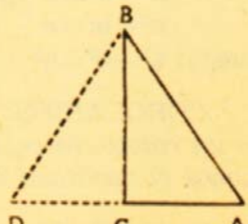


Fig. 115

Como los 2.ºs miembros de las 2 últimas igualdades son iguales, se tiene:

$$\mathbf{BD^2 = AB^2}$$

$\therefore$ **BD = AB** (extrayendo raíz cuadrada)
$\triangle$**BDC** $\cong$ $\triangle$**ABC** (3 lados iguales).
Pero $\triangle$**BDC** es $\triangle$ rectángulo en **C**.
Luego $\triangle$**ABC** es $\triangle$ rectángulo también. (Q.E.D.)

II.—TRANSFORMACION DE FIGURAS PLANAS (Problemas)

Transformar una figura es darle otra forma, sin cambiar su área.

Para transformar una figura en otra, hay que hacer uso de los teoremas sobre equivalencia de figuras.

PROBLEMA 1.—*Transformar un # en otro equivalente, que tenga un ángulo dado* α. (Fig. 116).

Solución.— Sean **ABCD** el paralelógramo y α el $\measuredangle$ dado.

En **A** se copia $\measuredangle$**BAD'** $= \alpha$
Se hace: **D'C' = DC**.

ABC'D' = paralelógramo pedido.

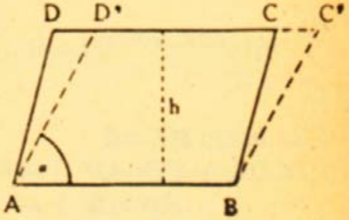


Fig. 116

Demostración: #**ABCD** = #**ABC'D'** porque tienen igual base **AB** y altura h.

PROBLEMA 2.—*Transformar un paralelógramo oblicuo en un rectángulo equivalente.* (Fig. 117).

Solución.—Igual al problema 1.

$\sphericalangle$**BAD'**$=\alpha=$**90°** (Fig. 117).

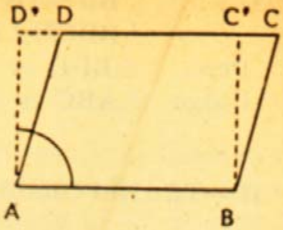


Fig. 117

PROBLEMA 3.—*Transformar un paralelógramo en otro en que uno de sus lados sea igual a un trazo dado* **d**. (Fig. 118).

Solución.—Se aplica el teorema de los #s complementarios.

Construcción.—Sea **ABCD** el paralelógramo dado.

Se prolongan: **AB→B** y **DC→C**.

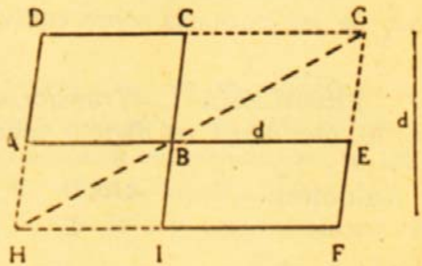


Fig. 118

Se hace: **BE=d**

Se traza: **FG**||**AD** (Por E).

B(↔)G y se prolonga la diagonal **GB** hasta su intersección **H** con **DA** prolongado.

Se traza: **HF**||**AE** y se prolonga **CB** hasta **I**.

Resulta: #IFEB = #ABCD.

Dem.) Teorema XXX.

PROBLEMA 4.—*Transformar un paralelógramo dado en otro equivalente de altura dada* **h**.

Solución.—Se aplica el teorema de los paralelógramos complementarios.

Sea **ABCD** el # dado. Se traza: **EF** ∥ **AB** (a la distancia **h**) se prolongan **DA** y **CB** hasta **E** y **F** respect.

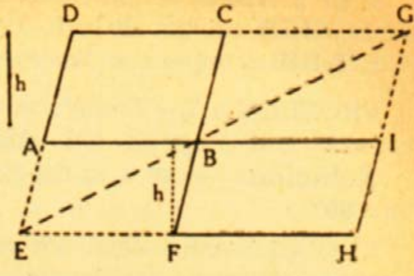


Fig. 119

Se traza la diagonal **EB** y se completa la Fig. del mismo modo que en el Problema 3.

Resulta: # **FHIB** (de altura h) = #**ABCD.**

Demostr.: Teorema XXX.

PROBLEMA 5.—*Transformar un # dado* **ABCD** *en otro que tenga un lado dado* **b'** *y cuyos ángulos sean iguales a los del paralelógramo dado.*

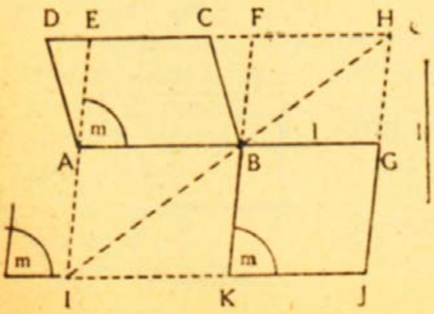


Fig. 120

Solución.—Véase problema 3.

PROBLEMA 6.—*Transformar un #* **ABCD**, *en otro que tenga un lado dado l y un ángulo dado* **m.** (Fig. 120).

Solución.—1º Se transforma el # **ABCD** en otro **ABFE** de ∢ **m.** (Probl. 1)

2º El # **ABFE**, así obtenido, se transforma en el equivalente **KJGB**, de lado **BG=l.** (Probl. 3).

KJGB cumple con las condiciones del Problema.

PROBLEMA 7.—*Transformar un #* **ABCD**, *en un rectángulo que tenga un lado dado* **b'**.

Solución.—Igual a la del Problema 6.

$\sphericalangle$**m=90°**.

PROBLEMA 8.—*Dado un cuadrado* **ABCD** *de lado l transformarlo en un rectángulo que tenga un lado dado* **a.**

Dos casos: 1º **a>l; 2º a<l.**

1.ª Solución.—Se aplica el teorema de los paralelógramos complementarios como en problema 5.

Este procedimiento soluciona los dos casos: 1º y 2º (Fig. 121).

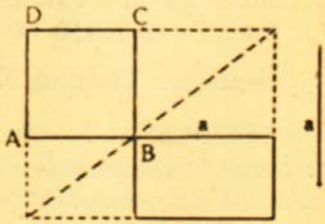


Fig. 121

2.ª Solución.—Se aplica el 1.er teorema de Euclides. (Teorema XXXIV).

1º Si **a>l**

Se construye el △ rect. **BGC** de hipotenusa **a** y un cat. **l.** (Fig. 122).

Para esto se prolonga **DC→C**

$\sphericalangle$**BCG**=90°.

CB=l=cateto

BG=a=hipotenusa

CI⊥BG.

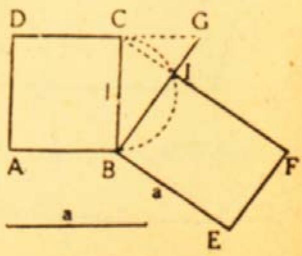


Fig. 122

El ▭ **BEFI** construido con **a** y la proyección **BI** es el rectángulo pedido.

2º Si $\mathbf{a} < \mathbf{l}$.

En este caso el trazo a en vez de ser la hipotenusa **BG** del △ rectángulo **BGC**, debe ser la proyección **BI** del mismo △.

Construcción.—**ABCD**=□ de lado **l** (Fig. 122)
⊙ de diámetro **CB**=**l** (1.er L. G. de I).
⊙ (**B**, **a**) corta en **I** (2º L. G. de I).
Se prolongan **DC** y **BI** hasta **G**.

El ▭ **BEFI** que se construye con los lados **BI**=**a** y **BE**=**BG** es el ▭ pedido.

3.ª Solución.—Se aplica 2º teorema de Euclides (Teorema XXXV).

El problema se reduce a construir un △ rectángulo en que la altura que parte del vértice del ∢ recto=**l** y una proyección sobre la hipotenusa = **a**.

Construído el △ rectángulo, se construye el rectángulo con las dos proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa.

4.ª Solución.—(Fig. 123). Si $\mathbf{a} > \mathbf{l}$.

Sea **ABCD** el cuadrado de lado **l** dado.

1.º Se transforma el cuadrado en el paralelógramo **CDEF**.

Para ello:

⊙ (**D**, **a**) corta prolongación de **AB** en **E**.

Se hace: **EF**=**DC**.

2.º El #**CDEF** se transforma en el rectángulo **EHGD**.

Basta trazar: **EH** ⊥ **ED** y **DG** ⊥ **DE**.

Fig. 123

PROBLEMA 9.—*Dado un trapecio, transformarlo: a) en un paralelógramo oblicuo; b) en un rectángulo; c) en un triángulo.*

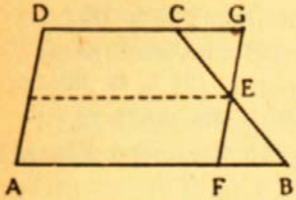


Fig. 124

Solución.— (Fig. 124) a) Se aplica el teorema XXXI
Se prolonga **DC→C**
Se traza **FG**||**AD.** (Por **E** punto medio de **CB**).
AFGD # pedido

b) Por los puntos medios **E** y (Fig. 125) de los lados no paralelos del trapecio, se trazan:
HG⊥**AB** y **DC.**
JI⊥**AB** y **DC.**
GIJH es el ▭ pedido.
Demostr.: Teorema XXXI

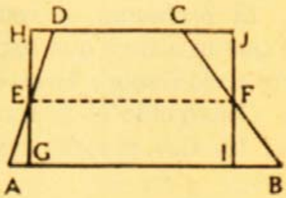


Fig. 125

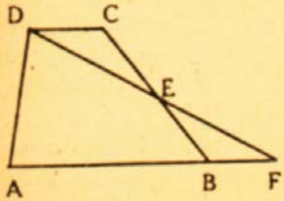


Fig. 126

c) Se aplica el teorema XXXII (Fig. 126).

Se prolonga **AB→B**
Se hace: **BF=DC.**

D(↔)F
△**AFD** = trap. **ABCD.**

PROBLEMA 10.—*Transformar un* △ *en otro que tenga con el primero una base común* **AB=c** (Fig. 127).

Solución.—Sea **ABC** △ dado.
Por C vértice opuesto al lado fijo **AB**, se traza: **CL**||**AB**.
Se une cualquier punto **C'** de la ||**CL** con los vértices **A** y **B**.

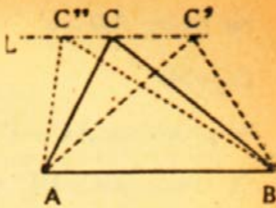


Fig. 127

Demostr. Teorema XXIX y L. G. 24, pág. 131.

OBSERVACION: El problema 10 tiene infinidad de soluciones, es indeterminado.

PROBLEMA 11.— *Transformar un* △ **ABC** *en otro equivalente que tenga una base* **c'** *dada.*

Solución.—Existen dos casos:

1.er Casos c'>c

Se prolonga **AB=c→B**

Se hace: **AD=c'**

C(↔)D

BE||**CD** (por **B**)

E(↔)D

Resulta: △**ADE**=△**ABC.**

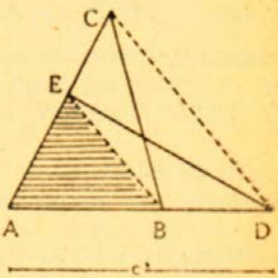


Fig. 128

Dem.) En los △s **ADE** y **ABC** se tiene (Fig. 128):

△**EBD** = △**EBC** (Tienen misma base **EB** e igual alt. desde **D** y **C** resp. o sea distancias entre ||s **EB** y **CD**).

△**ABE**=△**ABE** (Parte común).

∴△**EBD**+△**ABE**=△**EBC**+△**ABE**

o sea: △**ADE**=△**ABC.**

2.o Caso: $c' < c$

Se hace: $AD = c'$

$C (\leftrightarrow) D$

Se prolonga $AC \rightarrow C$

Se traza: $BC' \parallel DC$ (Por **B**)

$C' (\rightarrow) D$

Resulta $\triangle ADC' = \triangle ABC$

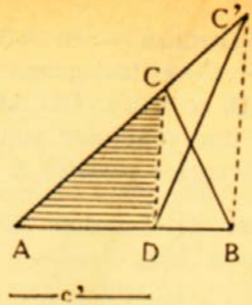


Fig. 129

Dem.) En los $\triangle$s **ADC'** y **ABC** se tiene: (Fig. 129).

$\triangle ADC = \triangle ADC$ (Parte común).

$\triangle CDC' = \triangle CDB$ (tienen misma base **CD** e igual alt. la distancia entre $\parallel$s **CD** y **BC'**).

$\therefore \triangle ADC + \triangle CDC' = \triangle ADC + \triangle CDB$.

Luego $\triangle ADC' = \triangle ABC$.

OBSERVACION.—Repítase el problema 11 dándose los otros lados: **a'** y **b'** en vez de **c'**. Obsérvese como aumentando la base del $\triangle$ pedido, disminuye su altura y viceversa.

PROBLEMA 12.— *Transformar un $\triangle$ **ABC** en otro equivalente que tenga una altura dada* $HI = h_c'$. (Fig. 130)

Solución.—Existen dos casos:

1.º $h'_c > h_c$; 2.º $h'_c < h_c$

1.er Caso: $h'_c > HC = h_c$

Se traza: $L \parallel AB$ (a la dist. h'_c)

Se prolonga **AC** hasta que corte **L** en **C'**.

$C' (\leftrightarrow) B$

Se traza: $CD \parallel C'B$ (por **C**)

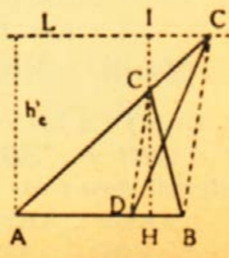


Fig. 130

C'(↔)D

Resulta: △**ADC'**=△**ABC**

Dem.: Los △s **ADC'** y **ABC** tienen: la parte común: △**ADC.**

Pero △**CDC'**=△**CDB** (Misma base **CD** e igual alt. dist. entre ||s **CD y C'B)**

Si a la parte común se agrega el △**CDC'** se obtiene △**ADC'.**

Si a la parte común se agrega el △**CDB** se obtiene △**ABC.**

Luego: △**ADC'**=△**ABC.**

2.º CASO: $\mathbf{h'_c < h_c}$

Se traza **C'F**||**AB** (a la dist. h'_c)

C'(↔)B

Se traza: CD||C'B (Por **C**).

C'(↔)D

Resulta: △**ADC'**=△**ABC.**

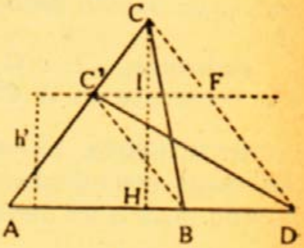


Fig. 131

Dem.: Los △s **ADC'** y **ABC** tienen la parte común **ABC'.**

Pero, △**C'BD**=△**C'BC** (Misma base **C'B** e igual altura distancias ||s).

Si a la parte común se le agrega el △**C'BD** resulta el △**ADC'.**

Si a la parte común se le agrega el **C'BC** resulta el △**ABC.**

Luego: △**ADC'**=△**ABC.**

PROBLEMA 13.— *Transformar un △* **ABC** *en otro equivalente que tenga con el primero la base* **AB= c** *común y el lado* **b'** *sea igual a un trazo dado.*

Solución.— (Fig. 132). Se traza **L**||**AB.** (Por el vértice C).

Con radio **b'** y con centro **A,** se corta la recta **L** en **C'.**

△**ABC'**=△**ABC** (Misma base y altura).

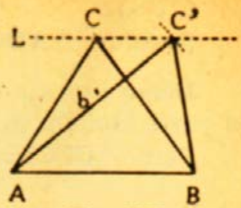


Fig. 132

PROBLEMA 14.—*Transformar un* △ **ABC** *en otro equivalente que tenga la base* **AB=c** *común con el primero, y que uno de los* ∢**s** *adyacentes a la base común sea igual a un ángulo dado* α'.

Solución.— Por **C** se traza una || a la base **AB.** En **A** se construye un ∢ **C'AB**=α'.

PROBLEMA 15.—*Transformar un* △ **ABC** *en otro que tenga con el primero la base* **c** *común y el ángulo opuesto igual a un ángulo dado* γ'.

Solución.— Se construye el arco capaz de γ' sobre **AB=c** como cuerda.

Se traza: **LC** || **AB** (Por C) (Fig. 133).

El punto de intersección de los dos Ls. Gs., **C'** o **C''**, es el tercer vértice del △ pedido.

△**ABC'**=△**ABC** (Misma base e igual altura).

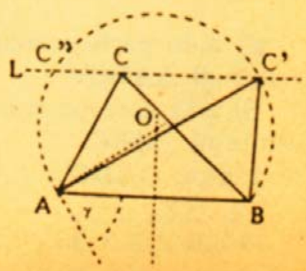


Fig. 133

Discusión.— Puede haber dos, una o cero soluciones.

PROBLEMA 16.— *Transformar un △ escaleno* **ABC** *en otro △ a) isósceles; b) rectángulo.* (Fig. 134).

Solución.— a) Se traza:
L || **AB** (Por **C**)
HC' simetral de **AB.**
Resulta: △**ABC'** isósc.=△**ABC**

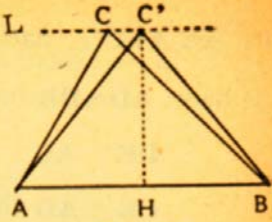


Fig. 134

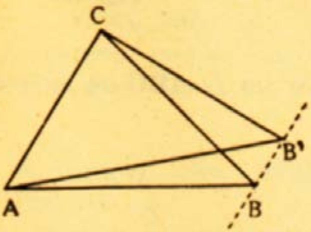


Fig. 135

b) Sea **ABC** el △ dado (Fig. 135).
Se hace: **BB'** || **AC** (Por **B**).
∢**ACB'**=90°
△**AB'C** rectáng. = △**ABC.**

PROBLEMA 17.—*Transformar un △* **ABC** *en un paralelógramo de modo que tenga con él, a) una misma base; b) una misma altura.* (Fig. 136).

Solución.— a) Como un △ es equivalente a la mitad de un paralelógramo de igual base y altura, **el # pedido debe tener la mitad de la altura del △**, ya que las bases deben quedar iguales:

$$\mathbf{DI} = \frac{1}{2}\mathbf{DC}$$

EF || **AB** (Por **I**).
BF || **AE** (Por **B**).
#**ABFE**=△**ABC.**

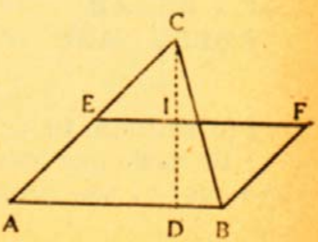


Fig. 136

b) Sea **ABC** △ dado (Fig. 137).

Se hace: **AD = DB** (mit. de la base **AB**)

DE ‖ **AC**

CE ‖ **AD** (misma altura)

#ADEC = △ABC.

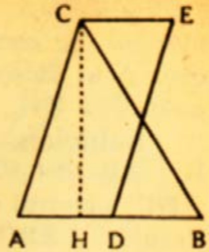


Fig. 137

PROBLEMA 18.—*Transformar un △* **ABC** *en un rectángulo.*

Solución.—Igual a la del problema 17.

El rectángulo debe tener la mitad de la altura del △ y misma base, (Fig. 138) o la mitad de la base y misma altura.

Constr.: $\quad$ **HI = IC = ½HC**

AF y **BE ⊥ AB.**

▭ABEF = △ABC.

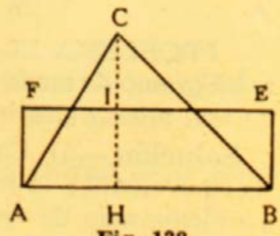


Fig. 138

PROBLEMA 19.— *Transformar un paralelógramo en un △ de modo que tenga a) una base común con el paralelógramo; b) una misma altura que el #.*

Solución.—a) La altura del △ ha de ser doble de la altura del #. b) La base del △ ha de ser el duplo de la base del paralelógramo.

PROBLEMA 20.—*Transformar un △* **ABC** *en otro tal que, conservando el ∢ β,* uno de los lados que lo forman, *sea igual a un trazo dado* **a'**.

Solución.— Igual a la del Probl. 11.

PROBLEMA 21.—*Transformar un △ dado en otro, de manera que dos de sus lados sean iguales a los trazos dados* **a'** *y* **b'**.

Solución.—Sea **ABC** △ dado. **(Fig. 139).**

Pimero se transforma el △**ABC** en otro **ABC'**, de manera que **BC'=a'**. **(Probl. 13).**

En seguida se transforma el △ **ABC'** en el △**BC'A'** de modo que conservando fijo el lado **BC'=a'**, sea **C'A'=b'**. Para ello se traza AA'||BC' **(Por A).**

Con **b'** y con centro en **C'** se corta **AA'** en **A'**.

△**BC'A'**=△**ABC.**

Dem.: Los △s **ABC** y **BC'A'** son equivalentes al △**ABC'**.

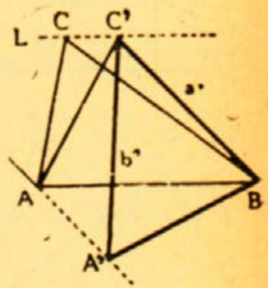


Fig. 139

PROBLEMA 22.—*Transformar un trapecio* **ABCD** *en un △ isósceles.* **(Fig. 140).**

Solución.—Primero se transforma el trapecio **ABCD** en el △ **EDA** (Probl. 9 c).

Después se transforma el △**EDA** en otro △ isósceles **AED'**. (Problema 16 a).

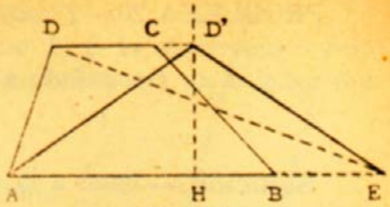


Fig. 140

PROBLEMA 23.—*Transformar un △ **ABC** en otro tal que, conservando el mismo ∢β, la altura correspondiente a uno de los lados que lo forman, sea igual a un trazo dado* $\mathbf{h'}_a$.

Solución.—Igual a la del problema 12.

PROBLEMA 24.— *Transformar un △ **ABC** en otro equivalente **DBC'** que tenga un lado situado sobre el lado **AB** del primero y el vértice opuesto a este lado en un punto dado **C'** del plano.* (Fig. 141).

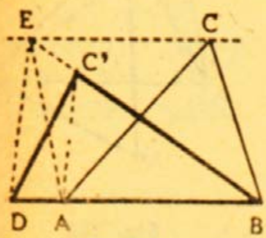


Fig. 141

Solución.—Primero, el △**ABC** se transforma en otro equivalente **ABE** de misma base **AB** y cuyo lado **BE** pasa por el punto **C'**. (Problema 10).

Después se transforma el △**ABE** en otro de base **BC'**.

Para ello: **C'(↔)A**
Se prolonga **BA→A**
Se traza: **ED**||**C'A** (Por **E**) hasta obtener D.
C'(↔)D.

Dem.) $\triangle$**DBC'**$=\triangle$**ABE**
(Tienen $\triangle$**AC'D**$=\triangle$**AC'E**)
Pero $\triangle$**ABC**$=\triangle$**ABE**.
Luego $\triangle$**DBC'**$=\triangle$**ABC**. (Dos cantidades $=$s).

PROBLEMA 25.—*Transformar un polígono cualquiera en otro equivalente que tenga un lado menos.*

Solución.—Sea el hexágono **ABCDEF** el polígono dado. (Fig. 142).

Se separa del polígono el $\triangle$**DBC** por la diagonal **DB**.
Se prolonga **AB**$\rightarrow$**B**.
Se traza **CG** $\parallel$ **DB** (Por **C**) hasta cortar la prolongación en **G**.
D$(\leftrightarrow)$**G**.
AGDEF es el polígono (pentágono) de un lado menos, equivalente al hexágono dado.

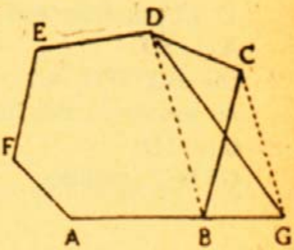


Fig. 142

Dem.) El pentágono **AGDEF** y el hexágono **ABCDEF** tienen:
$\triangle$**DBG**$=\triangle$**DBC** por tener misma base e igual alt. (dist. entre $\parallel$s. **DB** y **CG**).
ABDEF$=$**ABDEF** (Parte común en las 2 Figs.).
$\therefore \triangle$**DBG**$+$**ABDEF**$=\triangle$**DBC**$+$**ABDEF**.
Luego pent. **AGDEF**$=$hex. **ABCDEF**.

PROBLEMA 26.—*Transformar un pentágono en un triángulo.* (Fig. 143).

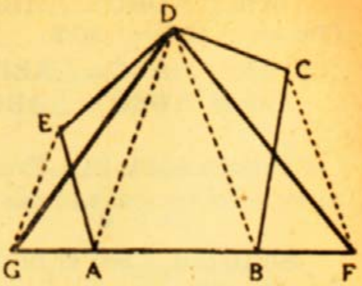


Fig. 143

Solución.—Sea el pentágono **ABCDE.** Repitiendo el problema 25 se transforman sucesivamente:

1º El pentágono **ABCDE** en el cuadrilátero **AFDE**

CF || **DB**

Se prolonga **AB→B** hasta **F.**

D(↔)F.

2º El cuadrilátero **AFDE** se transforma en el △ **GFD.**

A(↔)D

EG||**DA** (Por **E**).

Se prolonga **BA** hasta **G.**

G(↔)D.

GFD △ pedido.

PROBLEMA 27.—*Transformar un polígono cualquiera en un rectángulo equivalente.*

Solución.—Se transforma el polígono en un △. (Problemas 25 y 26).

El triángulo se transforma en un rectángulo (Probl. 18)

PROBLEMA 28.—*Transformar un rectángulo* **ABCD** *en un cuadrado equivalente.* (Fig. 144).

Solución.—Se prolonga **DC→C**

Se hace: **DE=DA**

Semi ⊙ de diámetro **DE.**
Se prolonga **BC→C,** hasta **I.**
DIHF construído sobre **DI** es el cuadrado pedido.

Demostr.: I(↔)E
DEI △ rectángulo en **I.**
Se aplica 1.er teorema de Euclides (del cateto): Teorema XXXIV.

2ª Solución del probl. 28. Aplíquese 2º teorema de Euclides (de la altura: Teorema XXXV).

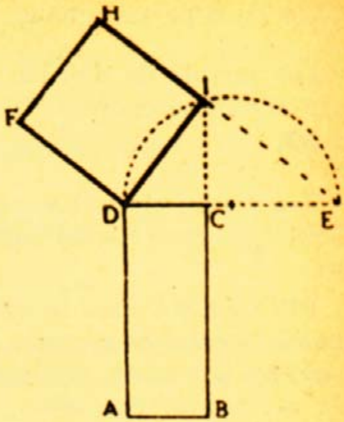


Fig. 144

PROBLEMA 29.—*Transformar un polígono cualquiera en un cuadrado equivalente.*

Solución.—Se transforma el polígono en un rectángulo (Problema 27).
El rectángulo se transforma en un cuadrado (Probl. 28)

III.—DIVISION DE FIGURAS PLANAS

PROBLEMA 30.—*Dividir un △ en* **n** *partes equivalentes por medio de transversales que parten de un mismo vértice.* (Fig. 145).

Solución.—Se divide uno de los lados en **n** partes iguales.

Los puntos de división se unen con el vértice opuesto. Figura 145. **n=5.**

Los $\triangle$s así obtenidos son equivalentes, por tener igual base y altura.

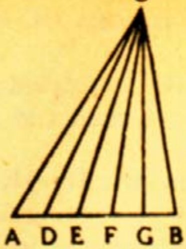


Fig. 145

PROBLEMA 31.—*Dividir un paralelógramo en* **n** *partes equivalentes por medio de* $\|$*s a uno de sus lados.* (Fig. 146).

Solución.—B a s t a dividir uno de los lados en partes iguales y trazar por los puntos de división, paralelas a los lados contiguos.

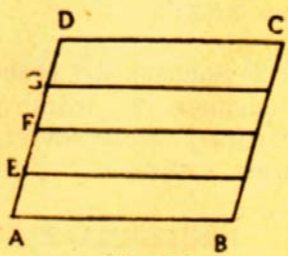


Fig. 146

PROBLEMA 32.—*Dividir un paralelógramo en un número par de partes equivalentes, por medio de transversales que partan de uno de sus vértices.*

Solución.—Sea el número par de partes equivalentes **n=6,** por ejemplo. (Fig. 147).

Se divide cada uno de los lados no concurrentes al vértice de origen de las transversales en $\frac{1}{2}$ n partes iguales (En este ej. en 3).

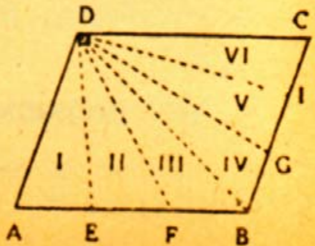


Fig. 147

Se unen los puntos de división con el vértice del cual parten las transversales.

En la Fig. 147, el paralelógramo quedó dividido en 6 $\triangle$s equivalentes.

Dem.: $\triangle s\mathbf{I}=\mathbf{II}=\mathbf{III}=\frac{1}{3}\triangle\mathbf{ABD}$ (mitad del #) $=\frac{1}{6}\mathbf{ABCD}$

$\triangle s\mathbf{IV}=\mathbf{V}=\mathbf{VI}=\frac{1}{3}\triangle\mathbf{CBD}$ (mitad del #) $=\frac{1}{6}\mathbf{ABCD}$

Luego los 6 $\triangle$s son equivalentes.

PROBLEMA 33.—*Dividir un paralelógramo en un número impar* **n** *de partes equivalentes, por medio de transversales que parten de un mismo vértice.*

Solución.— Se divide cada uno de los lados no concurrentes al vértice de origen de las transversales en **n** partes iguales.

Después se unen los puntos de división, uno por medio, con el vértice de origen de la transversal. En Fig. 148, **n=3**.

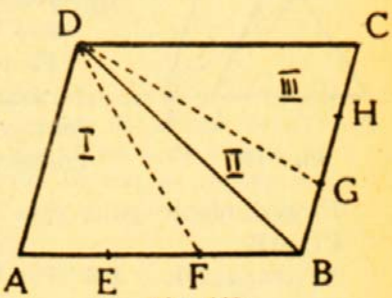


Fig. 148

Parte $\mathrm{I}=\frac{2}{3}$ del semi-paralelógramo $=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ del # **ABCD**

Parte $\mathrm{II}=\frac{2}{3}$ del semi-paralelógramo $=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ del # **ABCD**

Parte III $= \frac{2}{3}$ del semi-paralelógramo $= \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ del # **ABCD**

Luego: I=II=III $= \frac{1}{3}$ del # **ABCD**

PROBLEMA 33.—*Por un punto* **P** *situado sobre uno de los lados de un* △ **ABC**, *trazar una transversal que lo divida en dos partes equivalentes.*

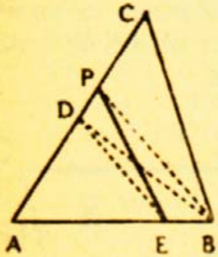


Fig. 149

Solución.—Se hace **DA=DC** (Fig. 149).

D(↔)B

Resulta △**DBA**=△**DBC** (igual base y altura).

El problema se reduce a transformar el △**DBA** en otro equivalente de base **AP** y en el cual se conserve el ∢**A.** (Problema 20).

Procedimiento para esta transformación:

P(↔)B.

Se traza: **DE** ‖ **PB** (Por **D**).

P(↔)E

△**PEA**=△**DBA**= $\frac{1}{2}$ △**ABC** = cuadril. **PEBC**

Demostración.—Los △s **PEA** y **DBA** tienen:

△**EDA** común.

△**DEP**=△**DEB** (Igual base **DE** e igual alt., dist. ‖s).

Luego: △**PEA**=△**DBA** etc.

2.ª Solución del problema 33.— (Fig. 150).

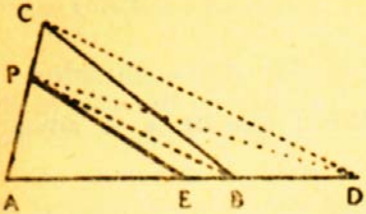


Fig. 150

Primero se transforma $\triangle$**ABC** en otro equivalente **ADP** de base **AP.**

P(↔)B

Se prolonga **AB→B**

Se traza: **CD**||**PB**

P(↔)D.

En seguida se divide $\triangle$**ADP** en dos partes equivalentes por una recta que parta de **P.** (Problema 30).

Se hace: **EA=ED.**

P(↔)E.

Resulta $\triangle$**AEP**=cuadril. **PEBC.**

Demuéstrese.

NOTA.—En la construcción precedente y en muchos otros casos, puede suceder que una parte de la transversal divisoria **PE** caiga fuera de la figura que se trata de dividir. Para colocarla enteramente en el interior de ella, se emplea el siguiente procedimiento.

1.er Ejemplo: (Fig. 151).

Sea **ABCDE** una figura y **PF** una transversal divisoria con una parte fuera de la figura.

Supóngase que la parte **APFE** es igual a la mitad **de ABCDE.**

Se trata de trazar desde **P** otra transversal dentro de la figura, de modo que la mitad del polígo-

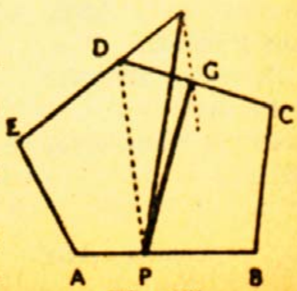


Fig. 151

no **ABCDE** quede totalmente en el interior de él.

Se une **P** con **D** (Vértice más próximo a **F**).

Se traza **FG** $\|$ **DP**. (Por **F**).

P(↔)**G**.

PG=transversal pedida

Dem.) $\triangle$**DPG**=$\triangle$ **DPF** (Misma base **DP**, e = altura: dist. $\|$s. **DP** y **FG**).

APDE=**APDE** (Parte común).

$\triangle$**DPG**+**APDE**=$\triangle$**DPF**+**APDE**.

Luego: **APGDE**=**APFE**=½ polígono.

2ª Ejemplo.—Problema 33. (2ª Solución).— En que una parte de la transversal divisoria queda fuera del $\triangle$ **ABC**. (Fig. 152).

$$\triangle EPA=\frac{1}{2}\triangle ADP=\frac{1}{2}\triangle ABC$$

(Léase 2ª Sol. del probl. 33).

Para introducir **PE** dentro de $\triangle$**ABC**, se une **P** con **B**.

Se traza: **EF** $\|$ **PB**.

P(↔)**F**.

PF = transversal pedida.

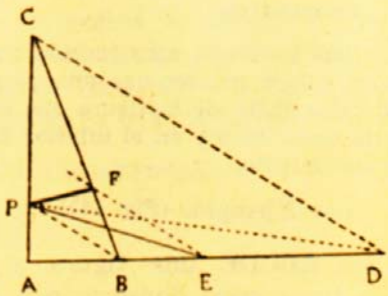


Fig. 152

$$\text{cuadril. } ABFP=\triangle AEP=\frac{1}{2}\triangle ABC.$$

Demuéstrese.

PROBLEMA 34.—*Dividir un △ en* **n** *partes iguales equivalentes por medio de transversales que parten de un punto* **P** *situado sobre uno de los lados.*

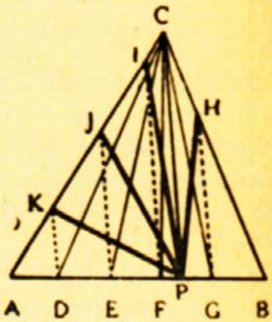


Fig. 153

Solución.—(Fig. 153) Se divide la base **AB** en n partes iguales, por ej.: 5 partes iguales.

Los puntos de división **D, E, F, G,** se unen con el vértice C.

Se obtienen 5 △s equivalentes. (Problema 30).

C/u de estos 5 △s se transforma en otro equivalente que tenga el vértice en **P.** (Problema 11).

P(↔)C.

Por los puntos de división de la base **D, E, F, G,** se trazan ||s a **CP.**

Resultan los puntos **K, J, I, H,** que unidos con **P** dan las transversales divisorias.

Demostración.—Los △s **APK** y **ADC** son equivalentes; en efecto, tienen parte común: △**DKA.**

y △**KDP**=△**KDC** (Misma base **KD** e igual alt.: vért. **C** y **P** están sobre la misma || a la base **KD**).

Sumando la parte común al △**KDP,** resulta el △ **APK**

Sumando la parte común al △**KDC,** resulta el △**ADC**

Luego: $\triangle \mathbf{APK} = \triangle \mathbf{ADC} = \dfrac{1}{5}\ \mathbf{ABC}$

Demostración.— Igual para las otras partes. Demuéstrese.

PROBLEMA 35.—*Dividir un cuadrilátero dado en* **n** *partes equivalentes por medio de transversales que parten de un punto dado* **P** *situado sobre uno de sus lados.*

Solución.—Sea **ABCD** el cuadrilátero dado. (**Fig. 154**).

Se transforma el cuadrilátero **ABCD** en el △ equivalente **PEF**, que tiene un vértice en **P**. (**Problemas 25 y 24**).

El triángulo **PEF** se divide en **n** partes equivalentes (4 por ejemplo). (**Problema 30**).

Para colocar enteramente dentro del cuadrilátero la transversal divisoria **PI'**, se traza **II'**||**BP** y se une **P** con **I'**.

Las transversales divisorias son **PG, PH, PI'**.

Demuéstrese.

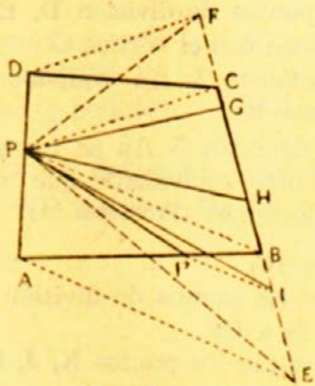


Fig. 154

NOTA.—Para dividir cualquier polígono en forma análoga a la del problema anterior, por transformaciones sucesivas, se transforma dicho polígono en un △ de modo que uno de sus vértices esté situado sobre el punto P. Enseguida se procede como en el problema 35.

PROBLEMA 36.—*Desde un vértice de un △, trazar una línea quebrada (Zig Zag) que divida al △ en cierto número de partes equivalentes.* (**Fig. 155**).

Solución.—Sea ABC el $\triangle$ dado y 6 el número de las partes equivalentes en que se va a dividir.

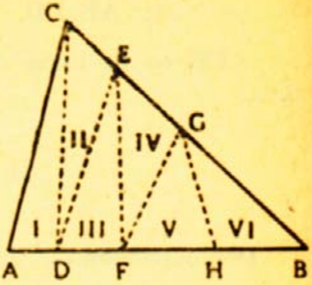


Fig. 155

Se hace: $\mathbf{AD} = \frac{1}{6}$ de **AB**.

Resulta: $\triangle$ $\mathbf{ADC} = \frac{1}{6}$ de $\triangle$ **ABC.** y

$\triangle\mathbf{CDB} = \frac{5}{6}$ de $\triangle$**ABC**.

Después se hace: $\mathbf{CE} = \frac{1}{5}$ de **CB.**

Resulta: $\triangle\mathbf{DEC} = \frac{1}{6}$ de $\triangle$**ABC** $(\frac{1}{5}$ de $\frac{1}{6}$ $\triangle\mathbf{ABC})$

Se sigue en la misma forma: $\mathbf{DF} = \frac{1}{4}\mathbf{DB}$; $\mathbf{EG} = \frac{1}{3}\mathbf{EB}$; $\mathbf{FH} = \frac{1}{2}\mathbf{FB}$.

Resulta: $\mathbf{I} = \mathbf{II} = \mathbf{III} = \mathbf{IV} = \mathbf{V} = \mathbf{VI} = \frac{1}{6}\triangle\mathbf{ABC}$.

PROBLEMA 37.—*Dividir un* $\triangle$ **ABC** *en dos partes equivalentes por medio de una línea quebrada que, partiendo de un vértice, pasa por un punto* **P** *situado dentro del* $\triangle$. (Fig. 156).

Solución.—A(↔)P.

DC = DB (lado opuesto al vértice **A**).

D(↔)P.

Se traza: **AE**||**PD.**

APE es la línea divisoria pedida.

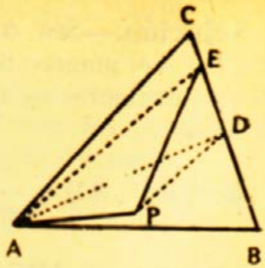


Fig. 156

Demostración.— $\triangle\mathbf{ADC} = \dfrac{1}{2}\triangle\mathbf{ABC}$ (**D**=punto medio de **BC**).

$\triangle\mathbf{AED} = \triangle\mathbf{AEP}$ (Misma base **AE** e igual alt.).

$\triangle\mathbf{AED} + \triangle\mathbf{AEC} = \triangle\mathbf{AEP} + \triangle\mathbf{AEC}.$

$\triangle\mathbf{ADC} =$ cuadril. $\mathbf{APEC} = \dfrac{1}{2}\mathbf{ABC}.$

PROBLEMA 38.—*Dado un △* **ABC** *determinar un punto* **P** *tal que, uniéndolo con los tres vértices, quede la figura dividida en tres partes equivalentes.*

Solución.— Se hace:

AD=DE=EB (Fig. 57).

Se trazan: **DP**||**AC.**

EP||**BC.**

P, intersección de las dos ||s, es el punto pedido.

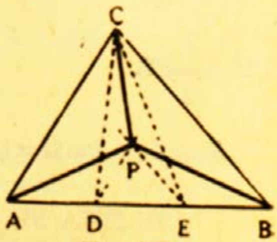


Fig. 157

Demostración.— Se trazan: **CD** y **CE.**

$\triangle\mathbf{ADC} = \triangle\mathbf{DEC} = \triangle\mathbf{EBC} = \dfrac{1}{3}\mathbf{ABC}.$

$\triangle$**ADC**$=\triangle$**CAP** (Misma base CA e igual alt.)$=\frac{1}{3}\triangle$ABC).

$\triangle$**EBC**$=\triangle$**CBP**$=$ (Misma base CB e igual alt.) $=\frac{1}{3}$ $\triangle$ABC.

También será $\triangle$**ABP**$=\frac{1}{3}\triangle$**ABC**.

IV—MULTIPLICACION DE AREAS

PROBLEMA 39.—*Se da un paralelógramo* **ABCD,** *construir otro* # **n** *veces mayor.*

Solución.— Basta hacer n veces mayor la base o la altura del # dado.

PROBLEMA 40.—*Dados un* $\triangle$**ABC**, *constrúyase otro* **n** *veces mayor.*

Solución.— Igual a la del probl. 39.

PROBLEMA 41.— *Construir un cuadrado equivalente a la suma de dos cuadrados dados* **A** *y* **B**.

Solución.— El lado del cuadrado pedido es la hipotenusa de un $\triangle$ rectángulo que tiene por catetos los lados de los cuadrados dados. (Fig. 158).

(Teorema particular de Pitágoras).

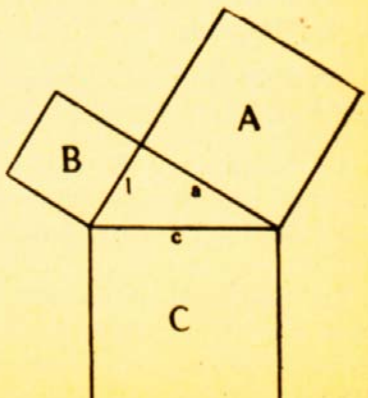


Fig. 158

PROBLEMA 42.—*Construir un cuadrado equivalente a la diferencia de dos cuadrados dados* **C** *y* **A**.

Solución.—Se aplica corolario 1º del Teorema XXXVI. (Fig. 158).

Se construye un △ rect. de hip. **c** y cateto **a**.

PROBLEMA 43.— *Construir un cuadrado que sea el duplo de un cuadrado dado.*

Solución—El cuadrado pedido tiene por lado la diagonal del cuadrado dado. (Fig. 159).

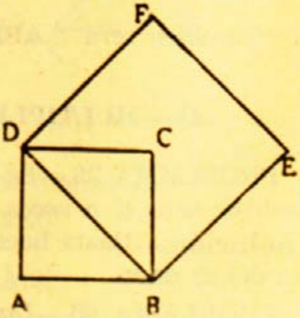


Fig. 159

Demostración.—En el △ rect. **DBC** se aplica el teorema de Pitágoras.

PROBLEMA 44.—*Construir un cuadrado que sea equivalente a la mitad de un cuadrado dado.*

1.a Solución.—El lado del cuadrado pedido es la mitad de la diagonal del cuadrado dado.

2.a Solución.—También se puede dividir el □ dado en dos ▭s equivalentes y uno de ellos se transforma en □ según problema 28.

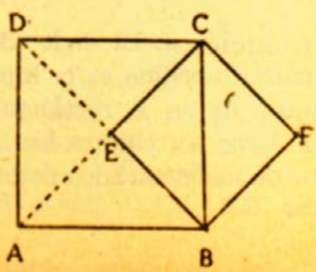


Fig. 160

PROBLEMA 45.—*Construir un cuadrado equivalente al triple de un cuadrado dado.*

Solución.— Se construye un △ rectángulo que tenga por catetos la diagonal y el lado del cuadrado dado.

La hipotenusa de este △ es el lado del cuadrado pedido.

PROBLEMA 46.—*Construir un cuadrado equivalente al quíntuplo de un cuadrado dado.*

Solución.— El lado del cuadrado pedido es la hipotenusa de un △ rectángulo que tiene por catetos respectivamente el lado y el duplo del lado del cuadrado dado.

NOTA.—Para construir un cuadrado que sea, 4, 9, 16, 25... veces mayor que otro, se toma por lado el duplo, el triple, el cuádruplo, el quíntuplo del lado del cuadrado dado.

Si el número no es cuadrado exacto, se descompone en suma ó diferencia de cuadrados exactos. Por ej. $5=4+1$; $3=4-1$; $13=9+4$..., etc.

Para obtener un cuadrado equivalente a $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ . . . $\frac{1}{n}$ de un cuadrado dado, se divide este cuadrado en n partes equivalentes, por medio de ||s a uno de sus lados y uno de los rectángulos así obtenidos se transforma en cuadrado (Problema 28).

PROBLEMA 47.—*Construir un cuadrado equivalente a los $\frac{2}{3}$ de un cuadrado dado.*

Solución.—Se toman los $\frac{2}{3}$ del cuadrado (un rectángulo) y se transforma en cuadrado según problema 28.

PROBLEMA 48.—*Construir un cuadrado equivalente a los $\frac{3}{4}$ de un △ dado ABC.*

Solución.—El △ se divide en 4 partes equivalentes.

El △ equivalente a los $\frac{3}{4}$ de **ABC** se transforma en rectángulo. (**Problema 18**).

Este rectángulo se transforma en cuadrado. (**Probl. 28**).

CAPITULO VII

CALCULO DE LAS AREAS DE LAS FIGURAS RECTILINEAS

§ *1.—MEDICION DE TRAZOS*

Medición de segmentos rectilíneos o trazos.— Si un trazo "**a**" está contenido un número **n** exacto de veces en otro "**b**", se dice que **n a** es *la medida* de **b**, y "**a**" *parte alícuota, divisor, o unidad de medida,* del segundo.

El *trazo que contiene a otro,* cierto número exacto de veces, es *múltiplo* de éste.

Máxima común medida de dos o más trazos es el mayor trazo que está contenido cierto número exacto de veces, en todos ellos.

Para hallar la máxima común medida de dos trazos, se aplica, con el compás de puntas secas o con una tira de papel, el menor sobre el mayor, una, dos, tres... **n** veces el residuo, si lo hay, se aplica sobre el trazo menor; el segundo residuo, sobre el primero, y así en adelante, hasta hallar una longitud que sea medida de la resta anterior. La última longitud empleada es la máxima común medida.

Los trazos que admiten común medida se dicen *conmensurables.*

Dos o más trazos que tienen común medida tienen innúmeras medidas comunes, puesto que cada parte alícuota de la medida común lo es también de cada uno de los trazos.

Dos trazos que no tienen medida común se dicen *inconmensurables.*

Ejemplo de trazos inconmensurables son la diagonal y el lado de un cuadrado.

En este caso se puede llegar a una aproximación tal que el residuo sea cantidad despreciable.

Razón entre dos trazos es el *cociente* indicado o efectuado *de los números* que *expresan la medida de estos trazos,* medidos con la misma unidad de longitud.

Si un trazo contiene la unidad de medida 5 veces y el otro 4 veces, la razón entre los dos trazos es: $\frac{5}{4}$

En lenguaje corriente se suelen enunciar las fórmulas para calcular las áreas de las figuras rectilíneas, simplemente como producto de dos trazos. Así se dirá, por ejemplo, "el área de un paralelógramo es igual al producto de la base por la altura". Entiéndase que sólo se trata del producto de los números que expresan las medidas de esos trazos.

§ *2.—AREA DEL RECTANGULO*

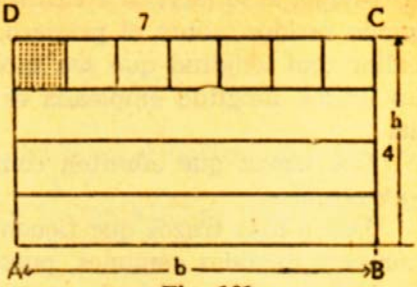


Fig. 161

Aplicando una común medida a los lados **AB** y **BC** de un rectángulo, si se halla, por ejemplo. que cabe 7 veces en **AB** y 4 veces en **BC**, la figura se puede dividir en 4 rectángulos congruentes por medio de paralelas a la base **AB.** Cada uno de estos rectángulos se puede dividir en 7 cuadrados que tienen por lado la unidad de medida.

Tomando por unidad de superficie uno de estos cuadrados, el área del rectángulo se expresará por $7 \times 4 = 28$ unidades de superficie.

El área del rectángulo es igual al producto de dos lados contiguos (base y altura). Abreviando:

$$\boxed{S = b\ h}$$

Al producto se le da la denominación de la unidad de superficie correspondiente a la unidad de longitud empleada para medir los lados: cm^2, dm^2, m^2, etc.

§ *3.—AREA DEL CUADRADO*

a) *En función del lado.*

Siendo el cuadrado un rectángulo de lados iguales, **el área de un cuadrado es igual al producto del lado por sí mismo**. (2ª potencia o cuadrado del lado).

$$\boxed{S = a \times a = a^2}$$

b) *En función de la diagonal.*

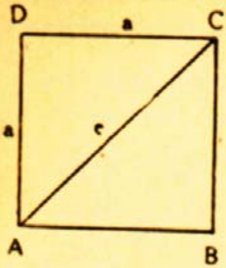


Fig. 162

En el cuadrado **ABCD, (Fig. 162),** se traza la diagonal **AC=e.**

Resulta el $\triangle$**ACD** rectángulo en D. Se aplica teorema particular de Pitágoras.

$$a^2+a^2=e^2$$
$$2a^2=e^2$$
$$a^2=\frac{e^2}{2}$$

De aquí se desprenderá que el **área de un cuadrado, en función de la diagonal, es igual a la mitad del cuadrado de la diagonal.**

§ *4.—AREA DE UN PARALELOGRAMO OBLICUO*

Se ha visto que un paralelógramo oblicuo es equivalente a un rectángulo de misma base y altura. (**Probl. 2.** Transformación de figuras).

Luego: **El área de un paralelógramo oblicuo es igual al producto de la base por la altura.**

$$\boxed{S=b.\ h.}$$

§ *5.—AREA DEL TRIANGULO*

a) En Función de la base y la altura respectiva.

Por ser un triángulo equivalente a la mitad de un paralelógramo de misma base y altura, **el área de un trián-**

gulo es igual al semiproducto de la base por la altura correspondiente:

$$\boxed{S = \frac{ah_a}{2} = \frac{bh_b}{2} = \frac{ch_c}{2}}$$

En general: $$\boxed{S = \frac{bh}{2}}$$

COROLARIO: *El área de un △ rectángulo es igual al semiproducto de los catetos.*

$$\boxed{S = \frac{ab}{2}}$$

b) En función del radio ρ de la ⊙ inscrita.— (Fig. 163).

△ABC = △COB + △COA + △OAB

$$= \frac{a\rho}{2} + \frac{b\rho}{2} + \frac{c\rho}{2}$$

$$\triangle ABC = \rho \cdot \frac{a+b+c}{2}$$

Pero: $$\frac{a+b+c}{2} = s$$

$$\therefore \triangle ABC = \boxed{\rho \cdot s}$$

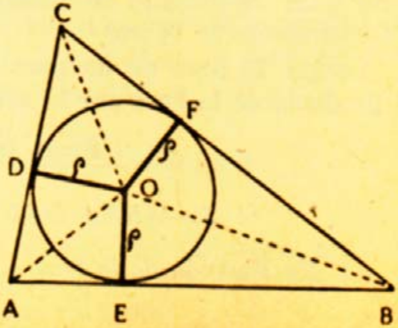


Fig. 163

Resultado que se puede enunciar así:

El área de un △ en función del radio de la circunferencia inscrita es igual al producto del radio ρ por el semiperímetro del △.

c) Area del △ en función del radio de la circunferencia ex-inscrita.

Sea el △**ABC y la** ⊙ **ex inscrita de radio** ρ_c (Fig. 164)

$$\triangle ABC = \triangle BCO + \triangle ACO - \triangle ABO$$

$$\triangle \mathbf{ABC} = \frac{BC \cdot \rho_c}{2} + \frac{AC \cdot \rho_c}{2} - \frac{AB \cdot \rho_c}{2}$$

$$\triangle ABC = \boxed{\rho_c \cdot \frac{a+b-c}{2}}$$

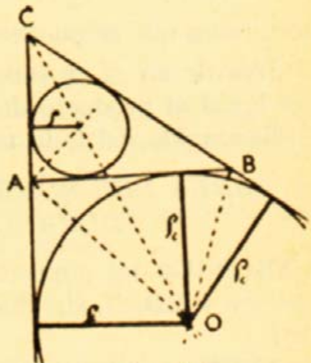


Fig. 164

Pero: $\dfrac{a+b-c}{2} = \mathbf{s-c}$.

En efecto:

$$\frac{\mathbf{a+b+c}}{2} = \mathbf{s}$$

Restando **c** a los dos miembros de la última igualdad se tiene:

$$\frac{a+b+c}{2} - c = s - c$$

$$\frac{a+b+c-2c}{2} = s - c$$

$$\frac{a+b-c}{2} = s - c$$

Luego: $\triangle ABC = \boxed{\rho_c\ (s - c)}$

Por un procedimiento análogo se pueden obtener las fórmulas:

$$\triangle ABC = \rho_b \cdot \frac{a+c-b}{2} = \rho_b\ (s - b)$$

$$\triangle ABC = \rho_a \cdot \frac{b+c-a}{2} = \rho_a\ (s - a)$$

Resultados que se pueden enunciar:

El área de un △ en función del radio de la ⊙ ex-inscrita es igual al producto del radio por el semi-perímetro del △ disminuído del lado tangente a la ⊙ ex-inscrita.

§ 6.—*AREA DEL ROMBO EN FUNCION DE LAS DIAGONALES* (1)

Sea **ABCD** (Fig. 165) un rombo y **AC=e** y **BD=f**, sus diagonales.

Area **ABCD** = △**ACD** + △ **ACB=2** △ **ACD.**

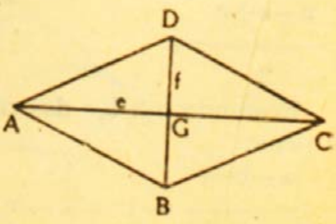


Fig. 165

$$\triangle ACD = \frac{ef}{4}$$

$$2\triangle ACD = \frac{ef}{4} \cdot 2 = \frac{ef}{2}$$

(1) Ver área de un # oblicuo, pág. 175.

Luego área rombo **ABCD** = $\boxed{\dfrac{ef}{2}}$

El área de un rombo es igual al semiproducto de las diagonales.

§ 7.—*AREA DEL TRAPECIO*

Por ser el trapecio equivalente a un △ que tiene la misma altura que él y cuya base es igual a la suma de las bases del trapecio (Teorema XXXII), se puede enunciar:

El área de un trapecio es igual al producto de la semi-suma de las bases por la altura.

$$\boxed{S_{\text{trap.}} = \frac{1}{2}(a+c)\,h}$$

Como la mediana del trapecio es igual a la semi-suma de las bases resulta el siguiente corolario:

COROLARIO.— *El área de un trapecio es igual al producto de su mediana por la altura.*

$$\boxed{S_{\text{trap.}} = m \cdot h}$$

§ 8.—*AREA DE UN POLIGONO REGULAR DE* n *LADOS*

Polígono regular es el que tiene sus lados y ángulos iguales. (Fig. 166).

Radio de un polígono regular es la recta que une el centro con uno de sus vértices. **OA**=**r.** (Fig. 166).

Apotema de un polígono regular es la ⊥ trazada desde el centro a uno de sus lados. Se designa por ρ.

OF es un apotema.

Cálculo del Area.—Sea el polígono regular **ABCDE.**

Se trazan los radios.
El polígono queda dividido en **n** △s congruentes isósceles.
Area de uno de los △s:

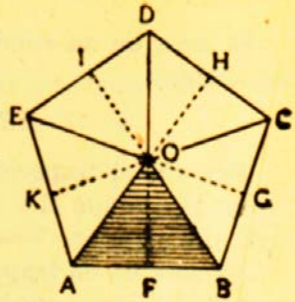


Fig. 166

$$\cancel{\triangle \mathbf{ABO} = \frac{2}{a} \rho}.$$

$$\triangle ABO = \frac{a}{2} \cdot \rho$$

$$\text{Pol } \mathbf{ABCDE} = \frac{\text{an}}{2} \cdot \rho$$

$$\text{Area } \mathbf{ABCDE} = s \cdot \rho$$

Luego: **El área de un polígono regular de n lados es igual al producto del semiperímetro por su apotema.**

§ 9.—*AREA DE UN POLIGONO IRREGULAR (Polígono de cualquier forma y de cualquier número de lados).*

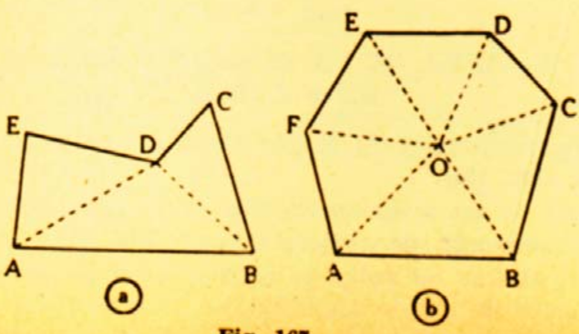


Fig. 167

Para calcular su área:

1.o Se puede descomponer el polígono en $\triangle$s por medio de diagonales que parten de un mismo vértice.

O bien por medio de rectas que unen los vértices con un punto del interior del polígono (Fig. 167 a y b).

Se calculan las áreas de dichos $\triangle$s según las reglas establecidas en la pág. 173 y enseguida se suman.

2.o En el polígono se puede trazar una diagonal o cualquier transversal y, desde los vértices se trazan $\perp$s a esta línea divisoria.

El polígono queda así descompuesto en $\triangle$s y trapecios. (Fig. 168).

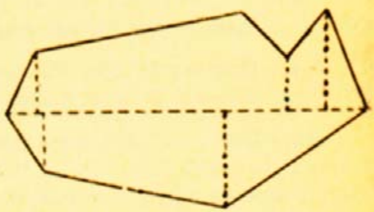


Fig. 168

En seguida se calculan las áreas de las distintas figuras y se suman.

3.o Se pueden trazar, por los vértices del polígono, $\parallel$s a uno de los lados hasta que corten otra vez el perímetro.

El polígono queda también descompuesto en $\triangle$s y trapecios cuyas alturas están situadas sobre la misma recta.

Si el polígono es inaccesible se encierra en una figura conocida; se calcula el área de esta figura, y de ella se resta el área de las partes que se han tomado de más.

Métodos análogos sirven también para determinar aproximadamente las áreas de figuras curvilíneas. El perímetro curvilíneo se divide en partes tan pequeñas que cada arco se puede considerar como rectilíneo.

GEOMETRIA SEGUNDA PARTE

GEOMETRIA

PROF. OMER CANO

SEGUNDA PARTE
Corresponde al quinto año de Humanidades

CAPITULO VIII. - Segmentos Proporcionales

CAPITULO IX.- Teorema general de Thales . Sus consecuencias y aplicaciones

CAPITULO X.- Circunferencia de Apolonio

CAPITULO XI.- Triángulos Semejantes

CAPITULO XII.- Polígonos semejantes

SEGUNDA PARTE

Correspondiente al

QUINTO AÑO DE HUMANIDADES

PROGRAMA

Razón entre dos trazos — Igualdad de esta razón con la razón de los números que los miden con la misma unidad — Razón de dos vectores sobre un eje — Igualdad de esta razón y la de sus medidas algebraicas — Razón de dos vectores paralelos — Segmentos o trazos proporcionales — Teorema de Thales relativo a la proporcionalidad de trazos en un sistema de paralelas y transversales — Recíproco — División interior y exterior de un trazo en una razón dada — División armónica — Problemas de aplicación — Semejanza de triángulos — Tres casos — Relaciones métricas en el triángulo rectángulo y en el círculo — Teorema de Euclides y Pitágoras — Potencia de un punto respecto de una circunferencia — Homotecia — Razón de homotecia — Figuras homotéticas: Recta, segmento, vector, semirrecta, ángulos homotéticos — Divisiones homotéticas — Recíprocos — Triángulos homotéticos — Problemas de aplicación — Polígonos semejantes — Perímetros y áreas — Comparación de ellos — Polígonos regulares — Perímetros — Areas de los más elementales — Problemas de aplicación — Perímetro y área del círculo.

GEOMETRIA DEL ESPACIO.—

Vectores: Definición — Vectores equipolentes — Vectores opuestos — Suma y diferencia de vectores — Razón de dos vectores paralelos — Proyección ortogonal.

CAPITULO VIII

SEGMENTOS PROPORCIONALES

§ 1.—NOCIONES GENERALES SOBRE VECTORES

Segmento rectilíneo.— *Segmento rectilíneo* es la parte de recta comprendida entre dos puntos, o bien, la distancia que hay entre dos puntos de una misma recta. Ej.: Segmento **AB,** (Fig. 169).

Eje orientado.— Si nos dan las posiciones de dos puntos A y B, la recta que los une, determina la dirección y la distancia o longitud que media entre ellos. No así su sentido. En efecto, no se sabe si hay que recorrer dicha distancia de A hacia B o bien de B hacia A. En la práctica se distinguen estos dos *sentidos* o *modos opuestos* de recorrer la recta por los signos + y — cuando convenimos en fijar como *positivo* el recorrido de izquierda a derecha y como *negativo* el de derecha a izquierda. Tal recta recibe el nombre de *eje orientado.*

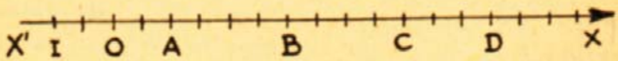


Fig. 169

Eje orientado *es toda recta indefinida X'X en la cual se ha elegido un punto O, que se toma como origen, y se ha fijado un sentido positivo y otro negativo* (Fig. 169).

El sentido positivo se indica generalmente por medio de una flecha.

Magnitudes escalares y vectoriales.— Las magnitudes que se presentan al estudiar el mundo físico son de dos clases. Las unas quedan completamente definidas cuando se conoce *la unidad* que se emplea y el *número que expresa su medida*. Tales magnitudes se llaman *escalares*. Ej.: La masa de un cuerpo, su volumen, su densidad, su temperatura, etc.

Hay otras magnitudes llamadas *vectoriales* que, para quedar perfectamente definidas es preciso conocer, además del número que expresa *su medida*, su *dirección* y *sentido*. Ej.: la velocidad de un cuerpo: no basta decir que ella es de 60 [Km/h]; habrá que expresar su dirección, v. gr.: vertical, y su sentido v. gr.: de arriba hacia abajo; lo mismo se podría decir de una fuerza, de una aceleración, etc...

Las *magnitudes vectoriales* se representan, gráficamente, por *vectores* (flechas), es decir, *segmentos rectilíneos* en los cuales están determinados su *longitud, dirección* y *sentido*.

Vectores.—Si en la fig. 170 el segmento rectilíneo **AB** se supone recorrido por un móvil que va de **A** hacia B, dicho segmento tiene el nombre de vector $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$; el punto de partida **A** del móvil es el origen del vector, el punto de llegada **B**, es el extremo.

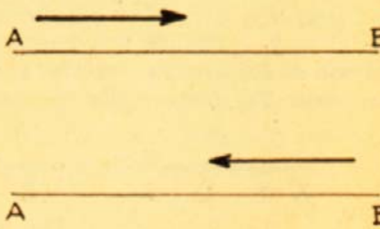


Fig. 170

Si al contrario, el móvil se moviera de **B** hacia **A**, tendríamos el vector $\overrightarrow{\mathbf{BA}}$; B sería *el origen* y A *el extremo*.

Un vector es, pues, esencialmente una *magnitud geométrica* y no un número.

Vector, *es un segmento rectilíneo en el cual están determinados su longitud o magnitud, su dirección y su sentido.*

Más brevemente podríamos decir: **Vector** *es un segmento de recta dirigido.*

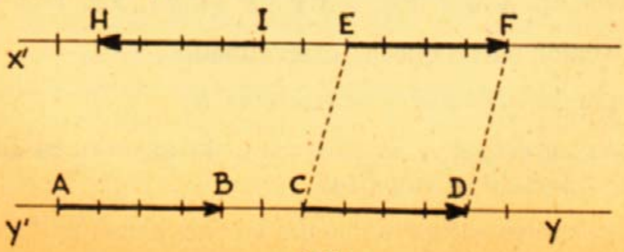
El vector que se elige para comparar las longitudes de los diversos vectores considerados, se llama **vector unidad o vector unitario.**

Un vector se representa por dos letras que designan sus extremos y por una pequeña flecha sobrepuesta a ellos.

La flecha se refiere a la propiedad *característica del vector* de representar, además de una magnitud determinada, una *dirección* y *sentido* bien definidos.

Por convenio la primera letra indica el origen del vector. Así, por ejemplo, el vector cuyo origen es el punto **A** y cuyo extremo es el punto **B**, se representa por el símbolo $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$, y se lee vector **AB.**

La recta indefinida a la cual el vector pertenece, se llama *soporte* del vector.



171a

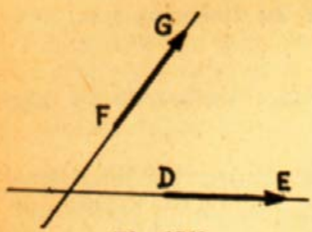


Fig 171b

Dos o más vectores pueden pertenecer: a) *a un mismo soporte*. Ej.: AB y CD. (Fig. 171 a).

b) *a dos soportes* ||s. $\overrightarrow{IH}$ y $\overrightarrow{AB}$. (Fig. 171a)

c) *a dos soportes no* ||*s.*: Ej.: $\overrightarrow{FG}$ y $\overrightarrow{DE}$. (Fig. 171b).

Dos vectores de soportes ||s, se dice que *son paralelos*. Ej.: $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ (Fig. 172).

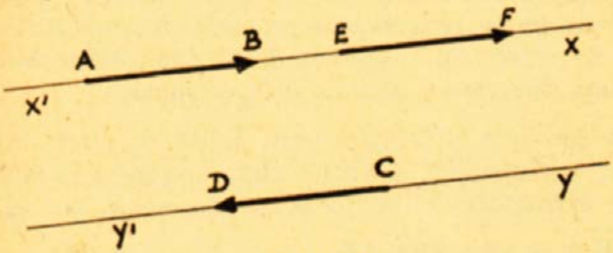


Fig. 172

Dos vectores que pertenecen a un mismo soporte se dice que son *colineales*. Ej.: $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{EF}$ (Fig.). (Fig. 172).

Un vector puede quedar determinado:

a) *por su origen A y su extremo B;*

b) *por su origen A, su dirección,* (su soporte), *su sentido en el soporte y su magnitud.*

Los vectores situados en un *mismo plano* se llaman ***coplanarios.***

Vector libre, Vector deslizante, Vector fijo.— Un **vector libre** es un vector que está definido por *su dirección, su sentido* y *su magnitud. Su origen es arbitrario.* Puede ser reemplazado por un vector *equipolente* cualquiera.

Un **vector deslizante** es el que está definido por su *soporte,* su *sentido* y su *magnitud.* Puede ser reemplazado por un vector equipolente colineal.

Un **vector libre** o **deslizante** pueden designarse por una sola letra $\vec{v}$ o $\vec{V}$.

Un **vector fijo** es un vector cuyo *origen, dirección, sentido* y *magnitud* están perfectamente definidos. No puede ser reemplazado por ningún otro vector.

Valor absoluto y valor algebraico de un vector.— Magnitud o longitud, o valor absoluto, o módulo de un vector, *es el número que expresa o mide su longitud en función de la unidad de medida.*

La magnitud o valor absoluto de un vector es una cantidad *escalar* porque el vector está privado de dirección y sentido.

El valor absoluto de un vector $\overrightarrow{AB}$ se representa por el símbolo $|AB|$ o simplemente por AB. Así, en Fig. 169, se puede escribir: $|AB|=|BA|=AB=4$.

Equivalente numérico o valor algebraico de un Vector *es el número que expresa o mide su longitud,* pero que está *afectado* por el signo + o —, según que el sentido del vector sea el sentido positivo o el sentido negativo del eje al cual pertenece.

---

(1) Ver más adelante, pág. 215, Vectores equipolentes.

El equivalente numérico del vector $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$ (Fig. 169) es $+4$ y del vector $\overrightarrow{DC}$ es -3. Para indicar el equivalente numérico o medida algebraica de un vector, se emplea el símbolo **AB**, o sea, dos letras mayúsculas con un pequeño trazo

lo $\overline{\mathbf{AB}}$, o sea, dos letras mayúsculas con un pequeño trozo encima.

En resumen: un vector $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$, soportado por un eje orientado X'X, se caracteriza o está definido por cuatro elementos:

a) **su origen A:** punto de arranque o de partida del vector; b) **su dirección:** es la del eje al cual pertenece el vector o la del que le es $\|$; c) **su sentido:** el de su origen A hacia su extremo B; d) **su magnitud:** la longitud AB o la distancia entre los puntos A y B.

$\overrightarrow{\mathbf{AB}}$ es el vector mismo (magnitud geométrica no numérica); $|\mathbf{AB}| = \mathbf{AB}$ es su valor absoluto o módulo (número aritmético, sin signo); **AB** es su equivalente numérico o su medida algebraica (número algebraico positivo o negativo).

En la Fig. 169 la medida Algebraica $\overline{OB}$ del vector $\overrightarrow{OB}$ que separa el origen O del punto B, se llama *abscisa* del punto B del eje orientado X X'.

La abscisa del punto B es $\overline{OB} = +6$

" " " " C es $\overline{OC} = +10$

" " " " I es $OI = -2$

A todo punto B de un eje orientado corresponde un número $+6$ bien determinado, que es su abscisa.

Recíprocamente, a todo número algebraico dado (—2), por ejemplo, corresponde un punto I bien determinado.

Por tal motivo se dice que hay entre cada punto del eje orientado y su valor algebraico correspondiente, una relación *biunívoca*.

Vectores equipolentes.— Se llaman *vectores equipolentes dos vectores de igual magnitud, de misma dirección y cuyos soportes son* ||*s o se confunden.*

En la Fig. 171a, los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ son equipolentes.

En el # CDFE son equipolentes los vectores $\overrightarrow{CD}$ y $\overrightarrow{EF}$; también $\overrightarrow{CE}$ y $\overrightarrow{DF}$ (Fig. 171a).

Dos vectores equipolentes pueden tener un mismo soporte ($\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$) o soportes paralelos ($\overrightarrow{CD}$ y $\overrightarrow{EF}$) (Fig. 171a).

La equipolencia de dos vectores se indica por la igualdad vectorial: $\overrightarrow{\mathbf{AB}} = \overrightarrow{\mathbf{CD}} = \overrightarrow{\mathbf{EF}}$.

Vectores opuestos.—*Son los vectores de igual longitud soportados por un mismo eje pero de sentidos contrarios.*

Ejemplo: Los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CB}$ son opuestos (Fig. 171 a). Del mismo modo son opuestas sus medidas algebraicas: $\overline{AB} = -\overline{CB}$.

Vectores consecutivos.—Dos vectores se dicen *consecutivos* cuando el origen del segundo coincide con el extremo del primero, el origen del tercero con el extremo del segundo, y así sucesivamente. Los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, (Fig. 169). son consecutivos.

Suma geométrica de vectores consecutivos.— Se llama *suma geométrica* o *resultante* de varios vectores consecutivos soportados por un mismo eje, el vector que tiene por origen, el origen del primero, y por extremo el extremo del último.

Segun la definición precedente, en fig. 173, resultan las igualdades geométricas siguientes:

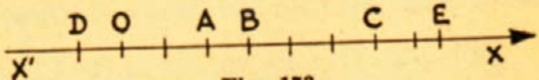


Fig. 173

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC};\quad \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}:\quad \overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EB}=\overrightarrow{AB}.$$

Esta definición se extiende a un número cualquiera de vectores:

$$AB+BC+CA=AA=0;$$

$$\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DD}=0$$

En los dos últimos casos la resultante se reduce a un punto: es nula.

Los vectores $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{EA}$,... etc.... se llaman *vectores componentes*.

Valor algebraico de la resultante de Vectores consecutivos.— *El valor algebraico o algébrico o equivalente numérico de la resultante de dos vectores consecuti-*

vos de igual dirección, es igual a la suma de los valores algebraicos de los vectores componentes. (Teorema de Chasles).

Fig. 174

Sean los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$ su resultante será el vector $\overrightarrow{AC}$.

Siempre se tendrá entre sus valores algebraicos la relación: $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$.

Se supone en 1.er lugar que los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$ tienen mismo sentido, y luego que tienen sentido contrario. Resultan los cuatro casos posibles indicados por la fig. 174:

En (1) se tiene: $\overline{AB}+\overline{BC}=(+7)+(+3)=+10 \therefore \overline{AC}=+10$

En (2) se tiene: $\overline{AB}+\overline{BC}=(-7)+(-3)=-10 \therefore \overline{AC}=-10$

En (3) se tiene: $\overline{AB}+BC=(+7)+(-3)=+\ 4 \therefore \overline{AC}=+\ 4$

En (4) se tiene: $AB+BC=(-7)+(+3)=-\ 4 \therefore AC=-\ 4$

Relación de Chasles.— La igualdad anterior $\overline{AC}=\overline{AB}+\overline{BC}$ se llama relación de Chasles. Agregando $\overline{CA}$ a los dos miembros resulta: $\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}=\overline{AC}+\overline{CA}=\overline{AA}$ (Resulta nula) o sea que: $AB+BC+CA=0$.

Es una segunda forma de la misma relación.

La relación de Chasles se puede extender a un número cualquiera de vectores. Así, si colocamos en un eje X'X (Fig. 169) 5 puntos A, I, C, B, D, *en un orden cualquiera* se puede escribir: $\overline{AI}+\overline{IB}+\overline{BD}+\overline{DC}=\overline{AC}$ y si se vuelve al punto de partida: $\overline{AI}+\overline{IB}+\overline{BD}+\overline{DC}=0$.

Aplicaciones de la relación de Chasles.— a) *La medida algebraica de un vector cualquiera $\overrightarrow{AB}$ es igual a la abcisa del extremo B disminuida de la abscisa del origen A.*

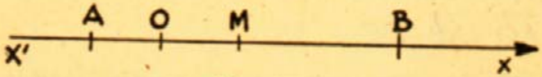


Fig. 175

Sea el vector $\overrightarrow{AB}$ (Fig. 175). La abscisa de A es $\overline{OA}$. La abscisa de B es $\overline{OB}$.

Se tendrá que: $\overline{AB}=\overline{OB}-\overline{OA}$.

En efecto: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}$.

$\therefore \qquad \overline{AB} = \overline{AO} + \overline{OB}$. Se reemplaza AO por su igual $-\overline{OA}$.

Luego: $\qquad \overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}$.

b) *La abscisa del punto medio M de un vector AB es igual a la semi suma de las abscisas del origen A y del extremo B de dicho vector.*

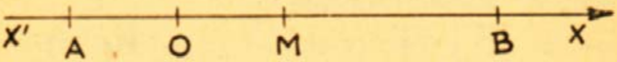


Fig. 176

Sea el vector $\overrightarrow{AB}$ y M su punto medio.

Resulta: $\qquad \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB} \therefore \overline{AM} = \overline{MB}$

Aplicando demostración anterior a cada uno de los miembros de la última ig. se tiene: $\overline{OM} - \overline{OA} = \overline{OB} - \overline{OM}$

$$\text{u} \quad \overline{OM} + \overline{OM} = \overline{OA} + \overline{OB}$$

$$\therefore 2OM = \overline{OA} + \overline{OB}$$

$$\therefore \quad \overline{OM} = \frac{\overline{OA} + \overline{OB}}{2}$$

Suma geométrica o composición de vectores.— Para sumar dos o más vectores, *es indispensable que éstos sean homogéneos*, es decir, que representen cantidades de significación análoga: velocidades, fuerzas, desplazamientos, etc.

Sean los vectores $\mathbf{\overrightarrow{OA}}$, $\mathbf{\overrightarrow{OB}}$, $\mathbf{\overrightarrow{OC}}$. (Fig.177).

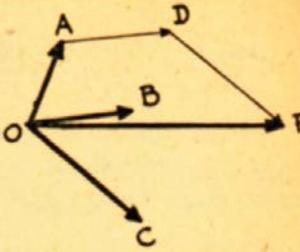


Fig. 177

Para *sumar estos vectores*, se desplazan los vectores $\overrightarrow{OB}$ y $\overrightarrow{OC}$ paralelamente a sí mismos y en igual sentido hasta que ocupen, respectivamente, la posición $\overrightarrow{AD}$ y $\overrightarrow{DF}$. (Vectores equipolentes).

Quedan, así, los vectores uno a continuación del otro, coincidiendo el origen del uno con el extremo del anterior. El vector $\overrightarrow{OF}$ que une el origen del primero con el extremo del último de los vectores componentes, es la resultante de los tres vectores. El vector $\overrightarrow{OF}$ es la suma geométrica de los tres vectores $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ y $\overrightarrow{OC}$; se anota así: $\overrightarrow{OF}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$.

Resta de vectores.—Restar el vector $\mathbf{\vec{b}}$ de otro $\mathbf{\vec{a}}$ es lo mismo que sumar con $\mathbf{\vec{a}}$ el vector opuesto de $\mathbf{\vec{b}}$. (Fig. 178a)

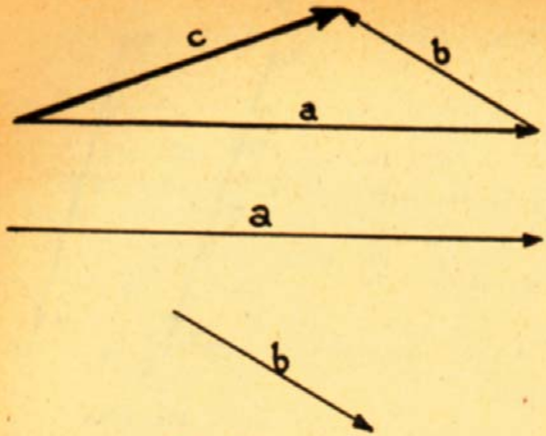


Fig. 178a

El vector $\vec{c}$ es la resultante

Se puede observar que el minuendo $\vec{a}$ es igual al sustraendo $\vec{b}$ sumado con la diferencia $\vec{c}$.

Producto de un vector por un número algebraico (o escalar) k.— Dados un vector $\overrightarrow{AB}$ y un escalar (o número algebraico), *se llama producto del vector $\overrightarrow{AB}$ por el escalar k, un vector $\overrightarrow{AC}$:*

de mismo origen y de mismo soporte que el vector $\overrightarrow{AB}$;
de mismo sentido que el vector $\overrightarrow{AB}$ si k es positivo;
de sentido contrario si k es negativo y cuya magnitud es la de AB multiplicada por $|k|$. (Fig. 178b).

Se indica $\overrightarrow{AC} = k \cdot \overrightarrow{AB}$

Ejemplo: $\overrightarrow{AC} = 2\ \overrightarrow{AB}$ (k=2)

$$\mathbf{AE} = -\frac{3}{2}\ \mathbf{AB}$$

Si $k = -1$, el vector

$\overrightarrow{AF} = (-1) \cdot \overrightarrow{AB}$

o sea: $\overrightarrow{\mathbf{AF}} = -\overrightarrow{\mathbf{AB}}$

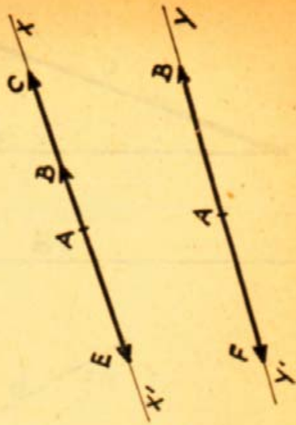


Fig. 178b

Si el vector dado es un vector deslizante o un vector libre $\vec{V}$, el vector $k\vec{V}$ es también un vector deslizante o un vector libre.

§ 2.—*RAZON Y PROPORCIONALIDAD DE TRAZOS Y VECTORES*

Se llama *razón*, en general, el *cociente* entre dos cantidades homogéneas.

Ej.: E°. 10 : E°. 5.

Razón entre dos trazos o segmentos rectilíneos *es el cociente entre los números que expresan las longitudes de dichos trazos, cuando se han medido con la misma unidad.*

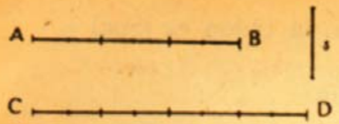


Fig. 178c

Ej.: Los trazos AB y CD están en la razón de 3 : 4 porque la unidad de longitud δ cabe 3 veces en AB y 4 veces en CD. (**Fig. 178c**).

Razón de dos vectores.— La razón entre dos vectores *pertenecientes a un mismo eje orientado o a ejes* $\|$*s, es igual al cuociente entre los números que expresan sus medidas algebraicas.*

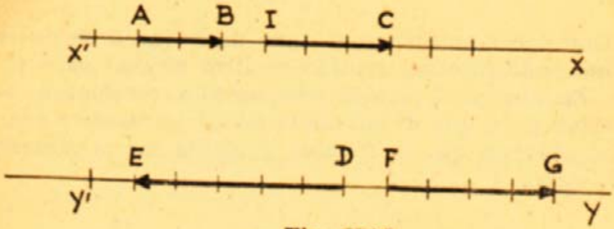


Fig. 178d

Si los vectores tienen el *mismo sentido, la razón es positiva* (de signo más): $\dfrac{\overrightarrow{IC}}{\overrightarrow{FG}} = +\dfrac{3}{\overrightarrow{4}}$.

Si los vectores tienen *sentido contrario*, la razón será *negativa* (de signo —): $\dfrac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{FG}} = -\dfrac{2}{\overrightarrow{5}}$ (**Fig. 178d**).

Si los vectores son equipolentes, la razón es igual a la unidad: $\dfrac{\overrightarrow{CD}}{\overrightarrow{EF}} = 1$ (**Fig. 171a**).

Si los vectores son opuestos, la razón es igual a

$$-1 : \frac{\overrightarrow{IH}}{\overrightarrow{EF}} = -1 \quad \text{(Fig. 171a).}$$

Cuando los *vectores son* $\|$*s*, hay que referirlos a un mismo eje orientado $\|$ a ellos. Este eje puede coincidir con la recta portadora de uno de los vectores (soporte del vector).

Conviene hacer notar que el **signo de la razón** de dos vectores es **independiente** del sentido positivo elegido para el eje orientado. En efecto, si cambia este sentido, cambiarán, también, de signo cada uno de los términos de la razón, o sea, los números algebraicos que la forman, y así, la razón conservará su mismo signo.

La igualdad de dos razones se llama *proporción*.

$$\text{Ej.:} \quad \frac{E^o.\ 10}{E^o.\ 5} = \frac{E^o.\ 6}{E^o.\ 3} \quad \text{o también:} \quad \frac{8\,\text{cm.}}{2\,\text{cm.}} = \frac{12\,\text{m}^2}{3\,\text{m}^2}$$

Refiriéndose a trazos o vectores se dice que:

"Dos segmentos rectilíneos o dos vectores o dos trazos son proporcionales a otros dos, *cuando la razón que existe entre los dos primeros, es igual a la razón entre los dos últimos*". (1)

(1) La expresión "razón entre 2 trazos" con frecuencia empleada para abreviar el lenguaje, debe entenderse que se trata de la razón entre los números que expresan las longitudes de dichos trazos medidos con la misma unidad.

La igualdad de estas dos razones, forma una *proporción entre trazos.*

Ej.: Si se dan los 4 trazos siguientes:

a=4 (cm.); b=2 (cm.); c=6 (cm.); d=3 (cm.)

La razón de los dos prime·

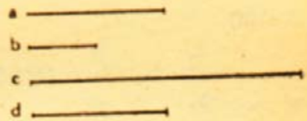


Fig. 179

La razón de los dos últimos: $\frac{c}{d}$, vale también, 2.

Resulta, entonces, la proporción: $\frac{a}{b} = \frac{b}{d}$

Se dice que los trazos **a** y **b** son *proporcionales* con **c** y **d.**

En general los segmentos a, b, c, d, e ... etc., son proporcionales a los segmentos a', b', c', d', e' ... si se tiene: $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{d}{d'} = \frac{e}{e'} \dots$

Del mismo modo se dice que los segmentos a, b, c, son proporcionales a los números 3, 4, 5, por ej., si resulta: $\frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{5}$

En toda proporción el 2º y 3.er términos, se llaman *medios,* y el 1º y 4º, se llaman términos *extremos.*

En la proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, **b** y **c** son los términos medios y **a** y **d** son los extremos.

Si en esta última proporción los 4 términos son trazos de distintas longitudes, cada uno de los términos de la proporción, es una *cuarta proporcional geométrica* = 4ª p. g.

Si se dan tres trazos:
a=4 (cm); **b**= 2 (cm); **e**=1 (cm), se puede formar la proporción:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{e} \text{ (Cada una de las razones vale 2).}$$

En esta última proporción el trazo **b** figura como consecuente de la 1ª razón y se repite en el antecedente de la 2ª razón (términos medios iguales). Esto se puede expresar diciendo que el trazo **b** es una *media proporcional geométrica* entre los dos trazos distintos **a** y **e**.

Cada uno de estos dos últimos trazos recibe el nombre de 3ª *proporcional geométrica*, en la proporción propuesta (3ª p. g.).

DEFINICION.—*Un trazo es la media proporcional geométrica* (M. p. g. o ½ p. g.) *entre otros dos, cuando es medio repetido en una proporción, cuyos extremos son los otros dos.*

REPASO DE ALGUNAS PROPIEDADES DE LAS PROPORCIONES.—Se pueden aplicar a una proporción cuyos términos son trazos, las mismas propiedades de las proporciones, estudiadas en el programa de Algebra de 4º Año.

I.—En toda proporción el producto de los medios es igual al producto de los extremos.

Ej.: En la proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

resulta: bc=ad.

Recíprocamente la igualdad de dos productos se puede transformar en proporción.

Ej.: pq=mm

$$\frac{m}{p} = \frac{q}{n}$$

Los factores de uno de los productos son términos medios y los del 2º producto, términos extremos.

II.—En toda proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ se puede:

1º *Alternar los medios:* $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

2º *Alternar los extremos:* $\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$

3º *Invertir las razones:* $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$

4º *Permutar las razones:* $\frac{c}{d} = \frac{a}{b}$

III.—En toda proporción la suma o diferencia de los términos de la 1º razón es a su consecuente o antecedente, como la suma o diferencia de los términos de la 2º razón es a su consecuente o antecedente.

En la proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, resulta:

$$\left.\begin{aligned} \frac{a+b}{b} &= \frac{c+d}{d} \\ \frac{a+b}{a} &= \frac{c+d}{c} \end{aligned}\right\} \quad \text{(Componer una proporción)}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{a-b}{b} &= \frac{c-d}{d} \\ \frac{a-b}{a} &= \frac{c-d}{c} \end{aligned}\right\} \quad \text{(Descomponer una proporción)}$$

IV.—En toda proporción la suma de los términos de la 1ª razón es a la diferencia de los mismos, como la suma de los términos de la 2ª razón es a su diferencia.

En la proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, resulta:

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d} \qquad \text{(Componer y descomponer)}$$

V.—En una serie de proporciones (serie de dos o más razones iguales) *la suma algebraica de los antecedentes es a la suma algebraica de los consecuentes como un antecedente cualquiera es a su consecuente respectivo.*

Si se tiene: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} \ldots$

Resulta: $\frac{a+c+e+\ldots}{b+d+f+\ldots} = \frac{a}{b} = \ldots$

§ 3.—*DIVISION DE UN TRAZO EN UNA RAZON DADA. DIVISION ARMONICA.*

PROBLEMA 8.—*Encontrar el máximo común divisor de dos números dados.*

Para encontrar el **m. c. d.** de dos números, se divide el mayor por el menor.

Si no hay residuo, el número menor es el m. c. d. de ambos.

Si queda residuo, se divide el divisor por este residuo; en seguida el primer residuo por el segundo, el segundo por el tercero, y así sucesivamente, hasta que no quede residuo.

El último divisor empleado es el **m. c. d.** buscado.

Ej.: encontrar m. c. d. entre 195 y 30.

$$195 : 30 = 6$$
$$15$$
$$30 : 15 = 2$$
$$0$$

el m. c. d. es 15.

PROBLEMA 9.—*Encontrar la máxima medida común para dos trazos dados.* (Fig. 180).

El procedimiento es análogo al que se emplea en aritmética para encontrar el **m. c. d.** de dos números dados.

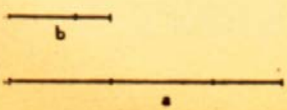


Fig. 180

El trazo menor **b** se aplica sobre el mayor **a** tantas veces como sea posible.

El residuo se aplica sobre el trazo menor **b**; el nuevo residuo si lo hay, sobre el anterior, hasta que no quede residuo; el último trazo que se aplica es la medida común.

Trazos conmensurables e inconmensurables.— En el problema precedente, los trazos tienen una común medida: los trazos son *conmensurables.*

Trazos inconmensurables son aquellos trazos que no tienen una común medida.

Por más que se prolongue la operación, nunca un residuo estará contenido exactamente en el anterior.

Citemos como ejemplo la relación entre el lado de un cuadrado y la diagonal. (Fig. 181).

DB—DA=EB

DA cabe 1 vez en DB y sobra EB.

Se traza EF⊥EB.

entonces EF=EB=AF.

EB en AB cabe 2 veces y sobra GB.

Se traza GH⊥GB.

GH=HE=GB.

GB cabe 2 veces en EB y sobra IB, y así sucesivamente...

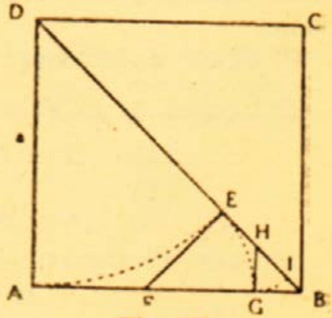


Fig. 181

TEOREMA XXXVIII.—**"En un trazo AB existe un solo punto cuyas distancias a los extremos A y B del trazo están en una razón dada".** (Fig. 182).

Dem.—Sea **C** ese punto.

y supóngase que $\dfrac{CA}{CB} = \dfrac{3}{4}$

Si existiera otro punto **C'**, tal que

$$\frac{C'A}{C'B} = \frac{3}{4}$$

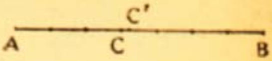


Fig. 182

se tendría

$$\frac{CA}{CB} = \frac{C'A}{C'B}$$

y componiendo

$$\frac{CB}{CA+CB} = \frac{C'B}{C'A+C'B}$$

$$\frac{AB}{CB} = \frac{AB}{C'B}$$

$CB=C'B$ ... **C** y **C'** se confunden. Luego, hay un solo punto interior que divide a AB en la razón dada.

TEOREMA XXXIX.— **"Sobre la prolongación de un trazo AB, existe un solo punto cuyas distancias a los extremos del trazo están en una razón dada".** (Fig. 183).

Dem) Sea **D** el punto y supóngase que

$$\frac{DA}{DB} = \frac{4}{3}$$

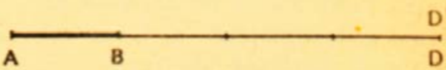


Fig. 183

si existiera otro punto **D'** tal que

$$\frac{D'A}{D'B} = \frac{4}{3}$$

se tendría

$$\frac{DA}{DB} = \frac{D'A}{D'B}$$

y descomponiendo

$$\frac{DA - DB}{DB} = \frac{D'A - D'B}{D'B}$$

$$\frac{AB}{DB} = \frac{AB}{D'B}$$

$DB = D'B \ldots$ **D** y **D'** se confunden.

Luego, la tesis es verdadera.

COROLARIO.— *Dados dos puntos A y B en una recta indefinida, existen en esta recta dos puntos y sólo dos que dividen al segmento AB en cierta razón dada.*

Sea la recta L. (Fig. 184).

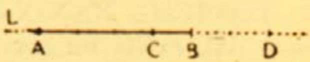


Fig. 184

Uno de los puntos, **C**, está entre **A** y **B.** Divide *interiormente* al trazo **AB,** por ej., en la razón de 1 : 3.

O sea que: CB : CA = 1 : 3.

El otro punto es **D,** está en la prolongación de AB. Divide *exteriormente* al trazo AB, supongamos, en la misma razón anterior, de 1 : 3.

O sea que: DB : DA = 1 : 3.

Dividido el trazo **AB** en esas condiciones, se dice que está dividido armónicamente por **C** y **D.**

Los puntos **A, B, C** y **D,** se llaman *puntos armónicos.*

DEFINICION.—*Dividir un trazo armónicamente es dividirlo interior y exteriormente en una razón dada.*

Para dejar establecido que un trazo **AB** queda dividido armónicamente por dos puntos **C** y **D**, (Fig. 184), basta probar la exactitud de la proporción: $CB : CA = DB : DA$.

La proporción resultante es una *proporción armónica.*

Los puntos **C** y **D** son puntos *conjugados armónicos* con relación a **A** y **B**, y recíprocamente.

Entre los dos pares de puntos, se forma un *juego armónico.*

OBSERVACION: Más adelante, pág. 246, se indica el procedimiento para dividir un trazo armónicamente, en una razón cualquiera, dada.

EJERCICIOS DE APLICACION

1. Trazar un eje orientado X'X y representar en él los puntos A, B, C, D, cuyas abscisas son, respectivamente, +3, +5, —2, —6. Enseguida expresar la medida algébrica de los vectores $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{DO}$. (Unidad: 1 cm.).

2. En un eje orientado, a partir de un origen O, colocar 4 puntos A, B, C, D, cuyas abscisas son: $a=-4$; $b=+5$; $c=-6$; $d=+1$. Encontrar el valor algébrico de los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$.

3. En un eje orientado se dan los puntos A, B, C, cuyas abscisas son: $a=-1$; $b=-5$; $c=+5$. Calcular: 1º la abscisa x del punto medio M de AB; 2º la abscisa x' del punto medio N de MC.

4. Tres puntos A, B, C, de un eje X'X tienen por abscisas respectivamente, a, b, c. Calcular la abscisa de un cuarto punto D de modo que se cumpla la relación: $\overline{DA}+\overline{DB}+\overline{DC}=0$.

5. Un punto D, situado en la prolongación del trazo AB=36 cm. es tal que DA : DB=7 : 3. Determinar **DA y DB.**

6. Un punto C divide interiormente al trazo AB = 42 cm en la razón CA : CB=2 : 5. Calcular **CA y CB.**

7. Un punto N divide interiormente al trazo AB en la razón NA : NB = 5 : 9. Su distancia al punto medio de AB es 28 cm. Calcular **NA, NB y AB.**

8. Un punto M divide exteriormente al trazo CD en la razón MC : MD = 5 : 9. Su distancia al punto medio de CD es 28 cm. Calcular **MC y MD.**

9. Divida un trazo de 15 cm en la razón 2 : 3, interior y exteriormente. Otro de 6 cm como 1 : 2. Otro de 35 cm como 2 : 5. Verifique las proporciones en sus dibujos.

CAPITULO IX

TEOREMA GENERAL DE THALES — SUS CONSECUENCIAS Y APLICACIONES

§ 1.—DIVISION DE UN SEGMENTO RECTILINEO EN PARTES IGUALES — TEOREMA PREPARATORIO (O LEMA)

TEOREMA XL.—**Las ||s que determinan partes iguales sobre una recta dada, determinan también, partes iguales sobre cualquier otra recta secante.** (Fig. 185 a).

$$\textbf{Hip.)}\ \begin{cases} AB \parallel CD \parallel EF \parallel GH \\ AC = CE = EG \end{cases}$$

$$\textbf{Tes.)}\quad BD = DF = FH.$$

Dem.) Trazar:

$$AL \parallel CM \parallel EN \parallel BH$$

se tiene que:

$$AL = BD$$
$$CM = DF$$
$$EN = FH$$

y $\triangle ACL \cong \triangle CEM \cong \triangle EGN$

(1.er caso)

luego $\quad AL = CM = EN$

y $\quad BD = DF = FH$

(Q. E. D.)

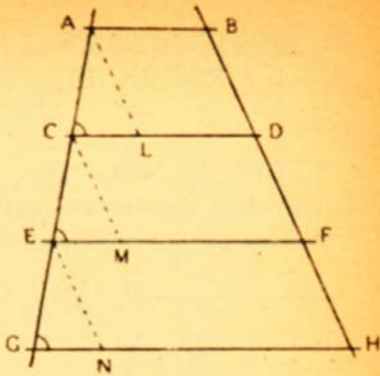


Fig. 185 a

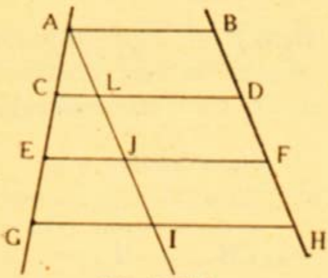


Fig. 185 b

2ª Demostración del teorema XL.—Se traza $AI \parallel BH$ (Por A) Fig. 185 b.

Resulta CL mediana de $\triangle$ EJA

$\therefore AL = LJ$

$$\text{Pero} \begin{cases} AL \;\#\; BD & \text{(lados op. de un \#)} \\ LJ \;\#\; DF & \text{(lados op. de un \#)} \end{cases}$$

Luego $\quad BD = DF$

y análogamente $DF = FH$... etc.

COROLARIO.—*Para dividir un trazo dado AB, en un número cualquiera de partes iguales.* (Fig. 186).

En 5 por ejemplo.

Se traza una recta indefinida AF. Sobre ella se copia 5 veces una unidad cualquiera, a partir de A.

Se une **B** con **C**; y por los puntos de división se trazan paralelas a **BC**.

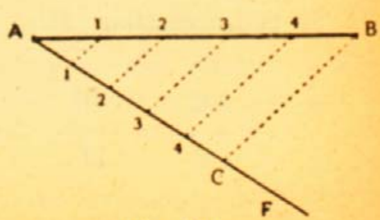


Fig. 186

§ 2.—*DIVERSAS FORMAS DEL TEOREMA DE THALES*

a) 1ª FORMA DEL TEOREMA GENERAL DE THALES

TEOREMA XLI.—**Tres o más rectas paralelas cortadas por otras dos rectas cualesquiera, determinan en éstas, segmentos proporcionales.** (Fig. 187).

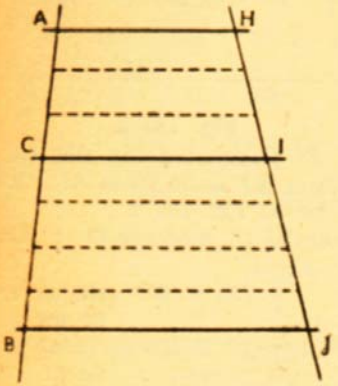


Fig. 187

Hip.) $AH \parallel CI \parallel BJ$.

Tes.) $\dfrac{AC}{CB} = \dfrac{HI}{IJ}$

Dem.) *1º Los segmentos tienen medida común, es decir, son* **conmensurables.**

Supongamos que

$$\frac{AC}{CB} = \frac{3}{4} \quad \text{(Fig. 187)}$$

Si por todos los puntos de división se trazan paralelas a AH, los segmentos HI e IJ serán divididos en 3 y 4 partes iguales.

Se podrá escribir $\dfrac{HI}{IJ} = \dfrac{3}{4}$

$$\therefore \quad \frac{AC}{CB} = \frac{HI}{IJ} \qquad \text{(Q. E. D.)}$$

2º *Los segmentos interceptados por las* $\parallel$*s no tienen medida común, es decir, son* **inconmensurables.** (Fig. 188).

Se toma una medida δ que quepa, por ej., **m** veces en **AC**, y **n** veces en **CB**, hasta el punto D, quedando un resto **DB**, menor que la medida adoptada δ.

Entonces, según el 1.er caso, se tiene:

$$\frac{AC}{CD} = \frac{HI}{ID'}$$

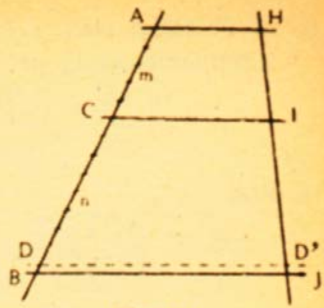


Fig. 188

Tomando ahora una medida cada vez menor, el punto **D** se va acercando al punto **B**, y **CD** *tiende a su límite* **CB** y cada vez se tiene según el 1.er caso:

$$\frac{AC}{CD} = \frac{HI}{ID'}$$

Tenemos 2 cantidades variables, a saber, las 2 razones $\frac{AC}{CD}$ y $\frac{HI}{ID'}$ que tienden a sus límites respectivos.

$$\frac{AC}{CB} \text{ y } \frac{HI}{IJ}$$

Pero: *si dos cantidades variables son iguales y permanecen constantemente iguales en todas sus variaciones, tendiendo a sus límites, en el límite también son iguales.*

Luego, se tiene:

$$\frac{AC}{CB} = \frac{HI}{IJ}$$

b) *2ª FORMA DEL TEOREMA GENERAL DE THALES*

Componiendo la proporción precedente:

$$\frac{AC}{CB} = \frac{HI}{IJ} \quad \text{(Fig. 187)}$$

resulta:

$$\frac{AC+CB}{AC} = \frac{HI+IJ}{HI}$$

$$\therefore \frac{AB}{AC} = \frac{HJ}{HI}$$

Del mismo modo comparando la suma de los términos con el consecuente:

$$\frac{AC+CB}{CB} = \frac{HI+IJ}{IJ}$$

$$\therefore \frac{AB}{CB} = \frac{HJ}{IJ}$$

Resultado que se puede enunciar así:

"Si tres o más rectas ||s se cortan por dos rectas secantes, dos segmentos cualesquiera determinados en una de las secantes, son entre sí como los dos segmentos correspondientes determinados en la otra secante".

c) *3ª FORMA DEL TEOREMA GENERAL DE THALES*

En la proporción:

$$\frac{AC}{CB} = \frac{HI}{IJ}, \quad \text{(Fig. 187), alternando los}$$

medios resulta:

$$\frac{AC}{HI} = \frac{CB}{IJ}$$

Expresar este resultado con palabras.

Resumen de las diversas formas del Teorema de Thales o maneras de leer las proporciones entre los trazos.

a) *Eligiendo los segmentos de la primera razón en una misma recta.* (Fig. 187).

$$\frac{AC}{CB} = \frac{HI}{IJ}; \frac{AB}{AC} = \frac{HJ}{HI}; \frac{AB}{CB} = \frac{HJ}{IJ} \ldots \text{etc.}$$

b) *Eligiendo alternadamente los segmentos en una y otra recta.* (Fig. 187).

$$\frac{AC}{HI} = \frac{CB}{IJ}; \frac{AB}{HJ} = \frac{AC}{HI}; \frac{AB}{HJ} = \frac{CB}{IJ} \ldots \text{etc.}$$

¿Qué otras proporciones se pueden obtener además de las del cuadro precedente? Demostrarlas.

§ 3.—*APLICACIONES DEL TEOREMA DE THALES*

En la figura 189 el segmento de una de las ||s interceptado por las rectas secantes, puede reducirse al punto de convergencia o de intersección **A** de dichas secantes, Fig. 189 a; o bien una de las ||s puede cortar las secantes más allá de su punto de intersección **C**. Fig. 189 b.

El Teorema de Thales se puede, pues, aplicar: 1º *a un ángulo cuyos lados o sus prolongaciones más allá del vértice están cortados por ||s; 2.º a un triángulo cortado por una || a uno de sus lados.*

En ambos casos las demostraciones son las mismas y con las mismas formas diversas que en el Teorema de Thales.

Al referirse a un ángulo, el Teorema de Thales se puede enunciar así:

"Si los lados de un ángulo, o sus prolongaciones más allá del vértice se cortan por dos ||s, dos segmentos cualesquiera determinados por ellas en uno de sus lados, son entre sí como los dos segmentos correspondientes determinados en el otro". (Fig. 189 a y b).

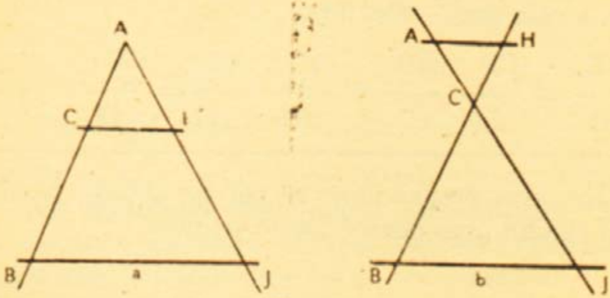


Fig. 189

El Teorema de Thales aplicado a un triángulo se enuncia como sigue:

TEOREMA XLII.— **Toda paralela a un lado de un △ determina en los otros dos lados segmentos proporcionales.**

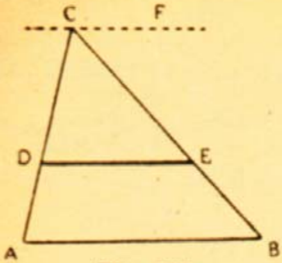


Fig. 190

Dem.) Por el vértice C, trazar

$$CF \parallel AB \text{ (Fig. 190).}$$

Segun el teorema anterior:

$$\frac{CD}{DA} = \frac{CE}{EB}$$

OBSERVACION.—La paralela **DE** se puede trazar fuera del triángulo, más allá del **vértice** o más allá de la base. (**Fig.** 189 b).

TEOREMA XLIII.—(Recíproco).—**Toda recta que determina segmentos proporcionales en dos lados de un triángulo, es paralela al tercer lado.** (Fig. 191).

Hip.) $\dfrac{CD}{DA} = \dfrac{CE}{EB}$

Tes.) DE $\parallel$ AB

1° **Dem.)** Si DE no es $\parallel$ con AB,
al trazar DE' $\parallel$ AB
se tendría:

$$\frac{CD}{DA} = \frac{CE'}{E'B}$$

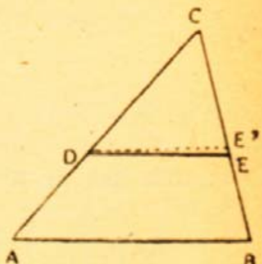


Fig. 191

lo que contradice la hipótesis, puesto que entre C y B existe un solo punto E tal que $\dfrac{CE}{EB} = \dfrac{CD}{DA}$

Luego E y E' se confunden.
y DE es paralela con AB. (Q. E. D.)

2.a Demostración del Teorema XLIII.—
(Indirecta) (Fig. 191).

Si DE no fuera || con AB, lo sería otra recta: DE'||AB

Se tendría: $$\frac{CD}{DA} = \frac{CE'}{E'B} \text{ (Teor. XLI)}$$

Pero por Hip. se tiene:
$$\frac{CD}{DA} = \frac{CE}{EB}$$

Entonces resultaría:
$$\frac{CE'}{E'B} = \frac{CE}{EB} \text{ (2 cantidades. . .)}$$

$$y \quad \frac{CE'+E'B}{CE'} = \frac{CE+EB}{CE} \text{ (Componiendo prop. anterior)}$$

$$\frac{CB}{CE'} = \frac{CB}{CE}$$

Se tendría así, un absurdo:
$$CE' = CE$$

Luego, DE || AB (Q. E. D.)

TEOREMA XLIV.—**Si los lados de un ángulo** (o sus prolongaciones más allá del vértice) **se cortan por rectas paralelas, las paralelas son entre sí como los segmentos de cada lado medidos desde el vértice hasta la paralela respectiva.** (Fig. 192).

Hip.) En ∢ C, HI ∥ AB

Tes.) $\dfrac{HI}{AB} = \dfrac{CH}{CA} = \dfrac{CI}{CB}$

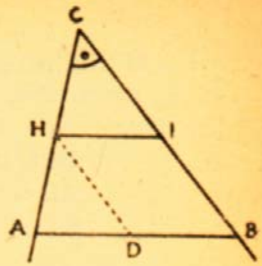


Fig. 192

Dem.) Trazar HD ∥ CB

Considerando ∢ A se tiene:

$\dfrac{DB}{AB} = \dfrac{HC}{AC}$ (Teor. de Thales aplicado a 1 ∢)

Pero DB = HI (DBIH es #)

Luego: $\dfrac{HI}{AB} = \dfrac{CH}{CA}$ (Reemplazando DB por su valor) (Q. E. D.)

Determinación gráfica de la 4ª proporcional geométrica.—

PROBLEMA 10.—*Construir la 4ª proporcional geométrica entre los trazos dados:* **a, b** *y* **c.**

Solución.—Para que el problema resulte *determinado,* se escribe, previamente, la proporción que debe verificarse entre dichos trazos: a : b = c : x.

Los teoremas XLI, XLII, proporcionan la solución.

Los trazos a y b, términos de la 1ª razón de la proporción anterior, pueden ocupar la posición de los segmentos de la 1ª razón, en cualquiera de las proporciones de la pág. 239.

Los trazos c y x deben ocupar la posición de los segmentos de la 2ª razón, en las mismas proporciones de la pág. 239.

Hay, pues, varias soluciones:

1.a Solución.— construye un ∢ A, arbitrario.

Se hace: AB=a (Fig. 193).
BC=b
AD=c
B(↔)D (Extremos de los dos antecedentes).
CE || BD
DE=x=4.ª p. g.

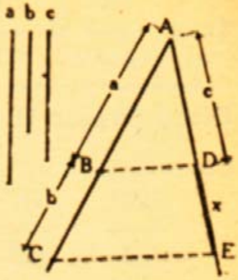


Fig. 193

2.a Solución.—
(1) ∢**A** (Fig. 194).
AB=a
AC=b
AD=c
B(↔)D
CE || BD
AE=x=4.ª p. g.

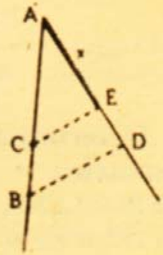


Fig. 194

3.a Solución.—
∢**A** (Fig. 195)
AB=a
BC=b
AD=c
B(↔)D
CE || BD
DE=x=4.ª p. g.

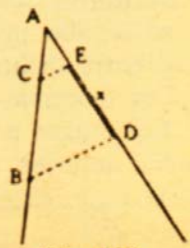


Fig. 195

(1) En cada una de las cinco soluciones se emplearán los trazos a, b y c de la Fig. 193.

4.a Solución.—

∢ A (Fig. 196)
AB=a
AC=b
BD=c
CE || BD
CE=x=4.ª p. g.

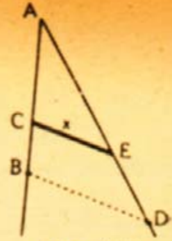


Fig. 196

5.a Solución.—

∢ **A** (Fig: 197)
AB=a
AC=b
AD=c
B(↔)C
DE || BC
AE=x=4.ª p. g., etc.

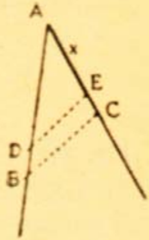


Fig. 197

Procedimientos para dividir un trazo armónicamente.—

PROBLEMA 11.—*Dividir interiormente un trazo dado AB en la razón de 2 : 3.*

Solución.— Sea AB el trazo dado. (Fig. 198).
Se traza un rayo dado AX.
Se hace:
AE=2 unidades arbitrarias
EF=3 unid. de las anteriores.
F(↔)B
EC || FB
Resulta:
AC : CB=AE : EF=2 : 3
Dem.) Teor. XLII.

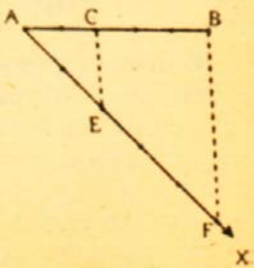


Fig. 198

PROBLEMA 12.—*Dividir exteriormente un trazo dado AB en la razón de 2 : 5.*

Solución.—Sea AB el trazo dado. (Fig. 199).

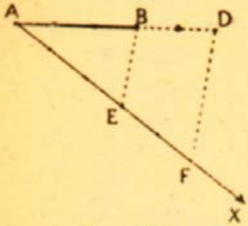


Fig. 199

Se traza rayo AX.

AF=5 unidades arbitrarias.

FE=2 unid. de las anteriores.

E(↔)B

FD || EB

Resulta:

DB : DA=FE : FA=2 : 5.

PROBLEMA 13.—*Dividir armónicamente un trazo dado AB en una razón dada m : n.*

1.a Solución.—Sea AB el trazo dado y m : n la razón dada. (Fig. 200).

a) Trazar rayo AX.

AC=m

CD=n

D(↔)B

CE || DB

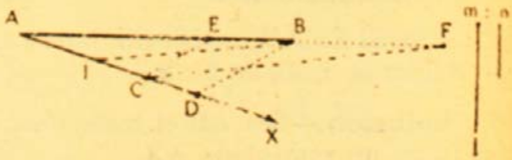


Fig. 200

E divide **interiormente** trazo **AB** en la razón de m : n.

b) Para dividirlo exteriormente se hace:

AC=m

CI=n

I(↔B)

CF || IB

F=punto de **división exterior** de **AB** en la razón de m : n.

Resulta: EA : EB=FA : FB=m : n.

Dem.—a) Considerando el $\sphericalangle$ **A** cuyos lados **AX** y **AF** están cortados por **BD** $\parallel$ **EC** (Fig. 200).

Resulta: $$\frac{EA}{EB} = \frac{CA}{CD} = \frac{m}{n}$$ (Teor. de Thales, con aplicación a un ángulo, página 240).

b) El $\sphericalangle$ **A** y sus lados cortados por **FC** $\parallel$ **BI** dan la proporción:

$$\frac{FA}{FB} = \frac{CA}{CI} = \frac{m}{n}$$ (id.)

$$\therefore \boxed{\frac{EA}{EB} = \frac{FA}{FB} = \frac{m}{n}}$$

Luego AB queda dividido armónicamente.

2.a Solución.—Sea AB el trazo dado (Fig. 201).

Trazar rayo arbitrario AM.

Se hace: **AM=m**
NN' $\parallel$ **AM** (Por B)
BN=BN'=n
M(↔)N→ . . . X
M(↔)N'→ . . . Y

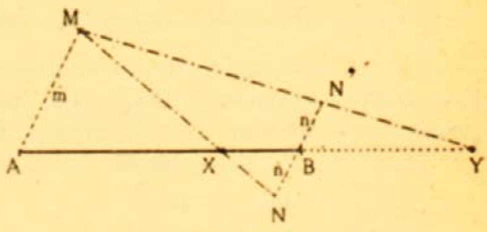


Fig. 201

X e Y dividen armónicamente el trazo AB.

Dem.) En el $\sphericalangle$ **AXM** sus lados XA y XM y sus prolongaciones son cortados por AM $\parallel$ BN. (Fig. 201).

$$\therefore \frac{XA}{XB} = \frac{AM}{BN} = \frac{m}{n}$$ (Teor. de Thales, aplicado a un $\sphericalangle$, pág. 240)

En el $\sphericalangle$ Y cuyos lados son cortados por AM $\parallel$ BN', resulta:

$$\frac{\mathbf{YA}}{\mathbf{YB}} = \frac{\mathbf{AM}}{\mathbf{BN'}} = \frac{\mathbf{m}}{\mathbf{n}} \qquad \text{(id.)}$$

$$\therefore \quad \boxed{\frac{XA}{XB} = \frac{YA}{YB} = \frac{m}{n}} \qquad \text{(Dos cant. =s a . . .)}$$

Luego AB queda dividido armónicamente.

Puntos armónicos.—Según quedó establecido en pág. 233, los puntos A, E, B, F, de la Fig. 200 y los puntos A, X, B, Y, de la Fig. 201, forman una *división armónica* o *un juego armónico*. Esto significa, tratándose por ej. de la Fig. 200, que, **si los puntos E y F son conjugados armónicos con relación a los puntos A y B, recíprocamente, A y B son conjugados armónicos, con relación a E y F.**

Dicho en otros términos significa que: "**si E y F dividen armónicamente al trazo AB, los puntos A y B, recíprocamente, dividen armónicamente al trazo EF**".

Para probar esto, basta demostrar la exactitud de la proporción: $\frac{\mathbf{AE}}{\mathbf{AF}} = \frac{\mathbf{BE}}{\mathbf{BF}}$.

En efecto se tiene:

$$\frac{EA}{EB} = \frac{FA}{FB} \qquad \text{(E y F div. AB armónicamente)}$$

$$\therefore \quad \frac{EA}{FA} = \frac{EB}{FB} \qquad \text{(alternando los medios)}$$

o sea: $\dfrac{AE}{AF} = \dfrac{BE}{BF}$ (Q. E. D.)

EJERCICIOS DE APLICACION

* **10.** Dividir un trazo dado AB en partes proporcionales a 1, 4, 5.

* **11.** Se da la razón m : n entre dos trazos y uno de ellos. Construir el otro trazo.

* **12.** Construir el trazo que indica la expresión: $x = \dfrac{ab}{d}$, si **a**, **b** y **d**, son trazos dados.

* **13.** Construir el valor de x, en la expresión: $x = \dfrac{a^2}{c}$, siendo **a** y **c** trazos dados.

* **14.** La suma de dos trazos es s. Si están en la razón de 3 : 4, construir dichos trazos. Id si los trazos están en la razón **m : n**.

* **15.** Dado un trazo **a**, prolongarlo en una magnitud **x** de modo que se cumpla la siguiente relación: a : x = m : n, siendo **m** y **n** trazos dados. Id si los trazos están en la razón de **5 : 3**.

* **16.** Dado un trazo **a**, prolongarlo en una magnitud **x** de modo que se verifiquen las relaciones siguientes: 1º $\dfrac{a+x}{a} = \dfrac{m}{n}$; 2º $\dfrac{a+x}{x} = \dfrac{m}{n}$, (m y n son trazos conocidos).

* **17.** Cuatro paralelas determinan sobre una recta segmentos de 3 cm., 5 cm., 8 cm. ¿Qué longitudes determinarán sobre un trazo de 64 cm. que tiene un extremo en la primera de ellos y el otro en la cuarta?

* **18.** Una recta paralela a un lado de un triángulo determina en un segundo lado segmentos de 27 cm y 18 cm.; ¿cuáles son los segmentos determinados en el tercer lado que mide 60 cm?

• **19.** Dos lados de un triángulo miden AB=24 cm y AC=32 cm. Sobre AB se toma AD=13 cm. ¿Qué longitud AE hay que tomar sobre AC para que DE sea paralela a BC?

• **20.** Dado un ángulo XOY se aplican sobre el rayo OX las longitudes OA=4 cm; OA'=6 cm; sobre OY se toman OB=6 cm y OB'=9 cm. ¿Qué se puede decir de las rectas AB y A'B'? Si AB =10 cm, calcular A'B'.

• **21.** En un trapecio ABCD de base mayor AB, se da sobre AD un punto M tal que $AM = \frac{2}{3} AD$ y sobre BC un punto N tal que NB=2NC.

¿Qué se puede decir de MN? Si AD=12 cm y BC=15 cm, calcular AM y BN.

• **22.** Un trazo de 40 cm se divide en tres segmentos m, n, q, que son entre sí como 2 : 3 : 5. ¿Cuánto mide cada uno de los segmentos?

• **23.** Se da la diferencia **d** de dos trazos y su razón 2 : 3. Construir dichos trazos.

• **24.** Dos trazos están en la razón de **m** : **n** y su diferencia es igual a un trazo dado **d.** Construir dichos trazos. (m y n son trazos conocidos).

• **25.** En un △ ABC trazar una paralela al lado AB de modo que la parte de ella interceptada por los otros dos lados sea igual: a) a los $\frac{4}{5}$ del lado paralelo; b) a los $\frac{3}{4}$ del lado paralelo.

• **26.** En un △ ABC (Fig. 202). DE ∥ AC; calcular:

1.º AD, sabiendo que: BD=8, BE=6 y EC=3

2.º AC, sabiendo que: BE=6, EC=3 y ED=8

3.º AD, sabiendo que:

$$AB=15 \text{ y } \frac{CE}{EB} = \frac{2}{4}$$

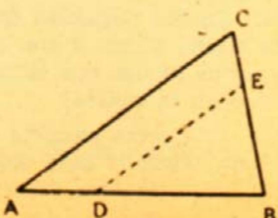


Fig. 202

4.º Sabiendo que: AC=12, ED=8 y BE=6, calcular los segmentos BC y EC.

5º Calcular BE, si BE=2DA, BD=9 y EC=2.

• **27.** Por un punto **P** situado entre los lados de un ángulo A, trazar una recta que corte los lados en B y C, de manera que se verifique: 1º) **AB : AC=m : n**; 2º) **PB : PC=m; n;** 3º) **BC : PC=m : n.**

• **28.** Determinar el **L. G.** de los puntos cuyas distancias a los lados de un ángulo dado sean entre sí como **m : n** (m y n son trazos conocidos).

SOLUCION: Se trazan las $\parallel$s. a los lados del ángulo a las distancias m y n, respectivamente. La recta que une el vértice del ángulo con el punto de intersección de las $\parallel$s. es el L. G. pedido. ¡Demuéstrelo!

29. Se da un ángulo A y un punto P situado fuera de él; trazar por P una recta **PBC** que corte los lados del ángulo en **B** y en **C** de tal modo que se pueda verificar la proporción siguiente: **PB : PC=2 : 5.**

30. Demostrar que si por el punto de intersección de las diagonales de un trapecio se traza una $\parallel$ a las bases, los segmentos de la $\parallel$ comprendidos entre dicho punto y los lados no $\parallel$s, son iguales.

PROBLEMAS DE CONSTRUCCION

(Aplicación de la 4ª proporcional geométrica)

Construir un $\triangle$ dados $a : b = m : n$, p, h_c

Análisis.—Sea ABC el △ pedido. Fig. 203.

En él se conoce:

$CD = h_c$
$DB = p$

∴ s. p. c. el △ rect. auxiliar CDB (h_c, $\sphericalangle D = 90°$, p)

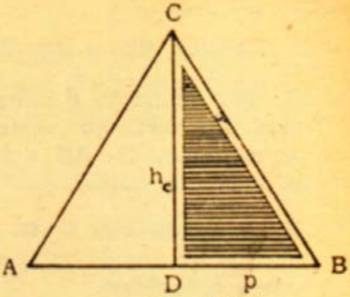


Fig. 203

Por el △ aux. quedan conocidos:
los vértices B y C,
el lado $BC = a$
y $\sphericalangle DBC = \beta$

Conociendo a, m y n, en la proporción dada, se puede obtener b como 4ª p. g. (Probl. 10, pág. 243).

∴ Ls. Gs. para A $\begin{cases} 1^{\circ}\ \text{BD prolongado} \rightarrow D \\ 2^{\circ}\ \odot\ (C, b) \end{cases}$

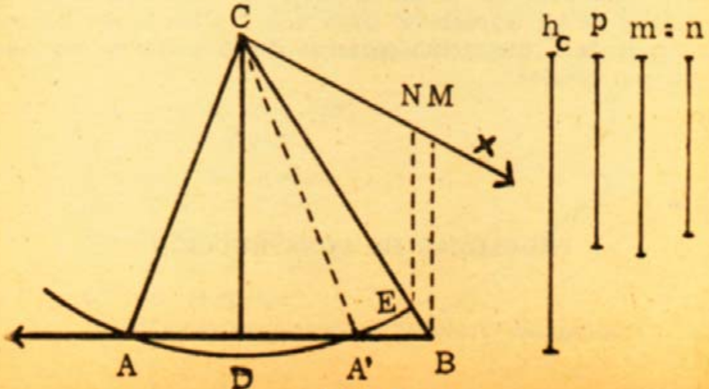


Fig. 204

Construcción.—Se hace: $CD = h_c$ (Fig. 204).

$\sphericalangle CDB = 90^\circ$

$DB = p$

$B(\leftrightarrow)C$

Se determina b como 4ª p. g.:

Rayo CX

$CM = m$

$CN = n$

$CB = a$

$B(\leftrightarrow)M$

$NE \parallel MB$

$CE = b = 4^a$ p. g. (m, n, a)

Se prolonga $BD \rightarrow D$

$\odot$ (C, b)

$A(\leftrightarrow)C$

Los $\triangle$ ABC y A'BC cumplen con las condiciones impuestas al problema.

Demostración.—En el $\triangle$ ABC (Fig. 204) se tiene:

$\sphericalangle CDB = 90^\circ$ (Por construcción)

$CD = h_c$ id.

$DB = p$ id.

También CB : CE (CA) = CM : CN = m : n (Por constr.)

Es decir: $a : b = m : n$

Lo mismo se puede demostrar en el $\triangle$ A'BC.

Discusión.—Con los datos h_c y p es posible en todo caso la construcción del $\triangle$ rectáng. aux. CDB y obtener $CB = a > h_c$.

Haciendo variar la magnitud de los términos de la razón m : n, se presentan los siguientes casos:

1º Si $m < n$, resultará siempre $a < b$ y a fortiori $h_c < b$.
$\therefore$ habrá dos soluciones, porque la $\odot$ (C, b) cortará a BD en dos puntos: a la izquierda de D y a la derecha de B.

2º Si $m = n$, resultará: $a = b$ y $b > h_c$
$\therefore$ habrá una solución y el $\triangle$ pedido resultará isósceles.

3º Si $m > n$, resultará siempre $a > b$
pero puede dar lugar a 3 casos con relación de b con h_c:

a) puede resultar: $b > h_c$, habrá 2 soluciones, caso de la Fig. 204.

b) puede resultar: $b = h_c$, habrá una solución. El $\triangle$ será rectángulo.

c) puede resultar: $b < h_c$, habrá 0 solución.

Construir un $\triangle$ dados:

• **31.** $a : b = 4 : 3$, a, h_a
• **32.** $a : b = m : n$, h_c, p
• **33.** $a : b = m : n$, q, a
• **34.** $p : q = m : n$, a, h_c
• **35.** $a : b = m : n$, r, α
• **36.** $c : t_c = m : n$, r, γ
• **37.** $a : b = 3 : 2$, a, h_c
• **38.** $a : c = m : n$, h_b, γ
39. $(a+b) : c = m : n$, c, r
• **40.** $h_c : c = m : n$, c, t_c
• **41.** $c : t_a = m : n$, r, γ
42. $c : t_c = 3 : 2$, c, t_a
• **43.** $(a+b+c) : h_c = m : n$, p β
44. $c : t_c = m : n$, c, t_b

Construir un # dados:

• **45.** $a : e = m : n$, a, ε
46. $a : b = 4 : 3$, b, h_a
47. $b : h_c = m : n$, ε, h_b
48. $e : b = 5 : 3$, b, $\measuredangle$ (a, f)

49. Construir un rombo dados: $e : f = m : n$, e.

• **50.** Dado un rectángulo de lados a y b, transformarlo: a) en otro que tenga un lado **c**; b) en un $\triangle$ rectángulo de hipotenusa c.

51. Por un punto P situado dentro de una circunferencia, trazar una cuerda APB tal que, se verifique la siguiente proporción: **PA : PB = m : n** (m y n son trazos conocidos).

52. Resolver gráficamente la siguiente ecuación: $4x = 12$. (Construir x y medirlo).

• **53.** Dado un $\triangle$ ABC, determinar un punto P sobre AB, cuyas distancias a los otros lados, sean entre sí como **m : n.** (m y n son trazos conocidos).

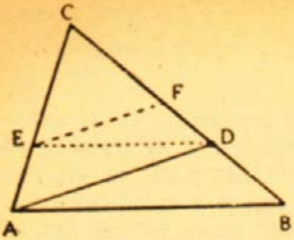


Fig. 205

54. Dado un $\triangle$ ABC, (Figura 205), únanse el vértice A con un punto arbitrario D, sobre CB. Trazar DE $\parallel$ AB y EF $\parallel$ AD. Probar que se verifica la siguiente relación:

$$CB : CD = CD : CF$$

¿Qué nombre recibe el trazo CD en la proporción anterior?

55. Dado un $\triangle$ ABC, márquese punto medio M de BC y trácese las bisectrices de los $\sphericalangle$s AMB y AMC que cortan los lados AB y BC en D y E, respectivamente.

Demostrar que: 1º) DA : DB = EA : EC; 2º) DE $\parallel$ BC.

• **56.** Si desde dos puntos B y C de un rayo AX se trazan dos segmentos paralelos de modo que sus longitudes sean procionales a las distancias de B y C al extremo A del rayo, la recta que une los extremos de los segmentos, pasa por el extremo del rayo. (Teorema recíproco del teor. XLIV).

57. Se da una recta L y un punto B sobre ella. Fuera de la recta se halla situado un punto P; sobre el segmento PB se encuentra otro punto C tal que PC : PB = m : n. El punto B se mueve sobre la recta L de modo que en cada posición se verifica la misma proporción: PC : PB = m : n.

¿Cuál es el L. G. del punto C?

58. Se dan dos $\triangle$s ABC y ABC' que están construídos a distintos lados de la base común AB. Sobre AB se marca un punto cualquiera D y se hace DM $\parallel$ AC y DN $\parallel$ AC', siendo M y N los puntos de intersección de las $\parallel$s con los lados BC y BC', respectivamente. Uniendo C con C' y M con N, demuéstrese que CC' $\parallel$ MN.

59. Sabiendo que E y F dividen armónicamente un trazo dado AB (E interiormente y F exteriormente) y que M es el punto medio de **AB**. Demostrar las relaciones siguientes:

1º $MA^2 = ME \cdot MF$;

2º $\dfrac{2}{AB} = \dfrac{1}{AE} + \dfrac{1}{AF}$

60. En un △ ABC se trazan las transversales de gravedad AM y BN; por su punto de intersección G se traza la paralela al lado AB que corta a los lados AC y BC en los puntos D y F, respectivamente. Unase M con N y calcúlese los lados del # DFMN, si AB=40 cm, AC=60 cm y BC=90 cm.

CAPITULO X

CIRCUNFERENCIA DE APOLONIO

TEOREMA XLV.—**La bisectriz de un ángulo interior de un triángulo divide interiormente al lado opuesto en la razón de los otros dos lados.**

Hip.) En △ ABC, $CX = b_\gamma$.

$\measuredangle s = \measuredangle t$

Tes.) $\dfrac{XA}{XB} = \dfrac{CA}{CB}$.

Dem.) (Fig.206).

$AC \rightarrow C$

Trazar BD ∥ CX

$\measuredangle s = \measuredangle r$ (Corresp. ∥s)

$\measuredangle t = \measuredangle i$ (alt. int. ∥s)

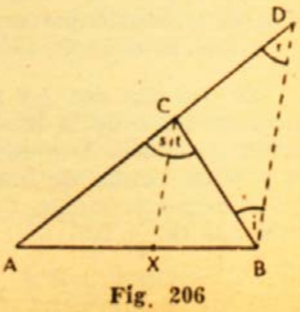


Fig. 206

Pero $\sphericalangle s = \sphericalangle t$
$\therefore$ $\sphericalangle i = \sphericalangle r$
y $CD = CB$

las paralelas CX y BD dan: $\dfrac{XA}{XB} = \dfrac{CA}{CD}$

y reemplazando CD: $\dfrac{XA}{XB} = \dfrac{CA}{CB}$

(Q. E. D.)

TEOREMA XLVI.—(Recíproco del teorema XLV).— **Si se da la proporción** $\dfrac{XA}{XB} = \dfrac{CA}{CB}$**, la recta CX es bisectriz del ángulo en C.** (Fig. 206).

Hip.) $\dfrac{XA}{XB} = \dfrac{CA}{CB}$
Tes.) $\sphericalangle s = \sphericalangle t$

Dem.) Prolongar $AC \rightarrow C$
y hacer $CD = CB$
$B(\leftrightarrow)D$

Reemplazando CB por CD se tiene: $\dfrac{XA}{XB} = \dfrac{CA}{CD}$

luego, $CX \parallel BD$.
y $\sphericalangle r = \sphericalangle s$
$\sphericalangle i = \sphericalangle t$

Pero $\sphericalangle r = \sphericalangle i$ ($\sphericalangle$s basales de $\triangle$ isósceles BDC)
$\therefore$ $\sphericalangle t = \sphericalangle s$
y CX es bisectriz del $\sphericalangle ACB$. (Q. E. D.)

TEOREMA XLVII.—**La bisectriz de un ángulo exterior de un triángulo, divide exteriormente el lado opuesto en la razón de los otros dos lados.** (Fig. 207).

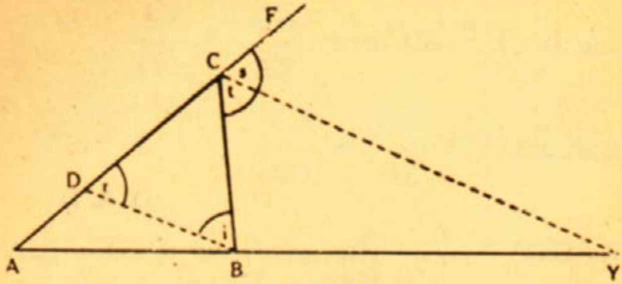


Fig. 207

Hip.) En $\triangle ABC$, CY bisectriz ext.

$\sphericalangle s = \sphericalangle t$

Tes.) $\dfrac{YA}{YB} = \dfrac{CA}{CB}$

Dem.) Trazar BD $\parallel$ CY

$\sphericalangle s = \sphericalangle r$ (corres. $\parallel$s)

$\sphericalangle t = \sphericalangle i$ (alt. int. $\parallel$s)

Pero $\sphericalangle s = \sphericalangle t$ (hip.)

$\therefore$ $\sphericalangle i = \sphericalangle r$

y $CD = CB$

las paralelas CY y BD, dan $\dfrac{YA}{YB} = \dfrac{CA}{CD}$

y reemplazando CD: $\dfrac{YA}{YB} = \dfrac{CA}{CB}$

(Q. E. D.)

TEOREMA XLVIII.—(Recíproco del teor. XLVII).—**Si se da la proporción $\frac{YA}{YB} = \frac{CA}{CB}$ la recta CY es bisectriz exterior del ángulo BCF.** (Fig. 207) Demuéstrese.

COROLARIOS.—1º *En un △ la bisectriz de un ángulo interior y la del ángulo exterior adyacente dividen al lado opuesto armónicamente en la razón de los otros dos lados que comprenden el ángulo.*

Dem.) En Fig. 208 se tiene:

$$\frac{MB}{MA} = \frac{CB}{CA} \text{ (Teor. XLV}$$

$$\frac{NB}{NA} = \frac{CB}{CA} \text{ (Teor. XLVII}$$

$$\therefore \frac{MB}{MA} = \frac{NB}{NA}$$

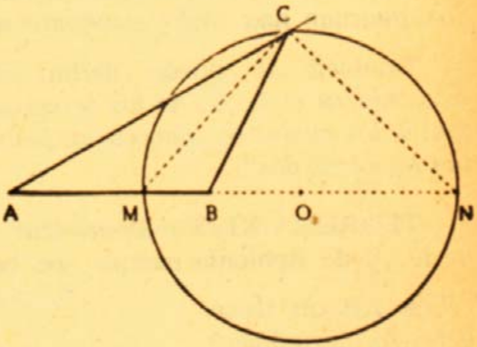


Fig. 208

También:

$$\frac{MB}{NB} = \frac{MA}{NA} \text{ (alt. medios pr. ant.)}$$

Lo mismo: $\frac{BM}{BN} = \frac{AM}{AN}$

Los puntos A, M, B, N son conjugados armónicos.

2º.—△MNC es rectángulo en C.

3º.—Cuando en un △ se conoce, un lado y la razón de los otros dos, el L. G. del 3.er vértice del △ es la ⊙ que tiene por diámetro el trazo determinado por los dos puntos que dividen armónicamente el lado conocido en la razón dada.

Dicha ⊙ se llama **circunferencia de Apolonio**.

DEFINICION.— Circunferencia de Apolonio *es el L. G. de todos los puntos cuyas distancias a dos puntos dados, guardan una razón constante m : n.*

También se puede definir así: "*Circunferencia de Apolonio es el L. G. de los terceros vértices de todos los △s de los cuales se conocen un lado y la razón en que están los otros dos*".

TEOREMA XLIX.—**Demostrar que cualquier punto de la ⊙ de Apolonio cumple con la condición de L. G.**

Sea AB un trazo dividido armónicamente por los puntos M y N, y C un punto cualquiera del L. G. (⊙ de Apolonio.

Dem.— Se traza DBF||AC (Fig. 209).

Se prolonga **CM** hasta D.

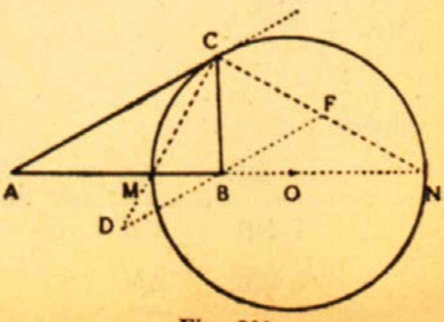


Fig. 209

Considerando

$\sphericalangle AMC$ y $AC \parallel DB$, se tiene:

$$\frac{MA}{MB} = \frac{AC}{DB} = \frac{m}{n} \text{ (Hip.) (1)}$$

En $\sphericalangle N$ y $AC \parallel BF$ se tiene:

$$\frac{NA}{NB} = \frac{AC}{BF} = \frac{m}{n} \text{ (Hip.) (2)}$$

$$\therefore \frac{AC}{DB} = \frac{AC}{BF} \ \frac{m}{n} \text{ (— razón común)}$$

$\therefore$ $DB = BF$ (antecedentes iguales en prop. anterior)

Pero $\triangle DFC$ es rectángulo en C.

y CB=transversal de grav. correpondiente a la hipotenusa.

$\therefore$ $CB=DB=BF=r$ (Del $\triangle$ rect. DFC)

Reemplazando DB y BF respectivamente en 1 y 2 por CB, se tiene:

$$\frac{MA}{MB} = \frac{AC}{CB} = \frac{NA}{NB} = \frac{m}{n}$$

EJERCICIOS DE APLICACION

• **61.** Un triángulo tiene por lados BC = 12 cm, AC = 15 cm, AB = 24 cm. Calcular los segmentos determinados en AC por la bisectriz del ángulo β.

• **62.** Los lados de un triángulo miden respectivamente 18, 30 y 36 cm. Calcular los segmentos determinados en los lados por las tres bisectrices interiores.

PROBLEMAS DE CONSTRUCCION

(Ejercicios basados en la circunferencia de Apolonio)

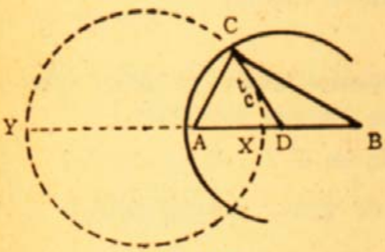


Fig. 210

Construir un △ dados: $a : b = m : n$, c, t_c.

Análisis.—Sea ABC el △ pedido (Fig. 210).

En el: AB=c
DC=t_c

Por el lado c quedan determinados los vért. A y B.

Ls Gs de C:
- 1º La circunferencia de Apolonio determinada por la división armónica de AB=c, según la razón de m : n.
- 2º ⊙ (D=punto medio de AB, t_c).

Construcción.—AB = c. (Fig. 211).
Se divide AB armónicamente en la razón m : n. Se hace para ello: Rayo BE arbitrario.

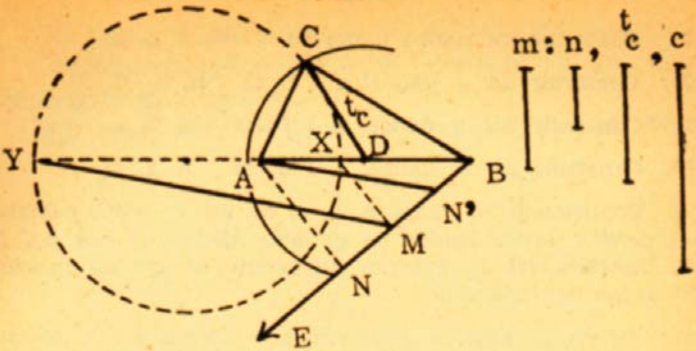


Fig. 211

BM=m
MN=n
N(↔)A
MX||NA, resulta X.
MN'=n
N'(↔)A
MY||N'A, resulta Y
⊙ de Apol. de diám. XY
AD=DB
⊙ (D, t_c) corta en C y C' a la ⊙ de Apol.
A(↔) C(↔)B
Los △s ABC y ABC' cumplen con las condiciones del probl.
Hacer la demostración y la discusión.

Construir un △ dados:

- • **63.** $a : b = m : n, c, h_c$
- • **64.** $c : a = 5 : 3, b, h_b$
- • **65.** $a : b = m : n, c, b_\gamma$
- • **66.** $a : c = m : n, b, \beta$
- **66'.** $a : b = m : n, c, t_c$
- **66''.** u, v, t_c
- **67.** $t_a : t_b = m : n, p, q$
- • **68.** $a : b = m : n, c, r$
- **69.** $a : b = m : n, p - q = d, \alpha - \beta = \delta$
- • **70.** u, v, β
- • **71.** $c : b = m : n, a, b_\alpha$
- **72.** $a : c = m : n, b_\beta, b$
- • **73.** $a : b = m : n, c, \gamma$
- **74.** $c : a = m : n, b, \beta$
- **75.** $b : c = 2 : 3, a, b + c = s$
- **76.** $c, a : b = m : n, t_a : t_b = m' : n'$

• **77.** Construir un rombo dados: e : f=m : n, a.

• **78.** Construir un # dados: e : f=m : n, h_b, d.

• **79.** Construir un # dados: e : f=m : n, d, ε.

80. Construir un # dados: a : d=m : n, f, β

• **81.** Conociendo los lados a, b, c, de un △ ABC, calcular los segmentos determinados en el lado AB=c: 1º por b_γ; 2º por la bisectriz del ∢ exterior adyacente al ∢γ en función de los lados del triángulo.

82. En un △ ABC, a = 24 cm, b = 20 cm y c = 40 cm. Calcular los segmentos v, u y el radio de la ⊙ de Apolonio que pasa por el vértice C.

83. Dado un △ **ABC** determinar dentro de él un punto **P** tal que, sus distancias a los vértices del △ sean entre sí como tres trazos dados **m, n y p.**

83'. En un △ ABC en el cual a : b = m : n, demostrar la relación: $r = \dfrac{mnc}{m^2-n^2}$, siendo r el radio de la ⊙ de Apolonio que divide el lado c armónicamente en la razón en que están los otros dos lados.

CAPITULO XI

TRIANGULOS SEMEJANTES

§ *1.—DEFINICIONES Y GENERALIDADES*

Triángulos semejantes y en general, *polígonos semejantes,* son los que tienen sus ángulos respectivamente iguales, y sus lados homólogos, proporcionales.

Dos polígonos semejantes tienen misma forma sin ser necesario que tengan igual área.

El signo de semejanza es $\sim$. Se debe leer semejante a.

Vértices homólogos son los vértices de los ángulos respectivamente iguales.

Ej.: el vértice B es homólogo con el vértice E. (Fig. 212).

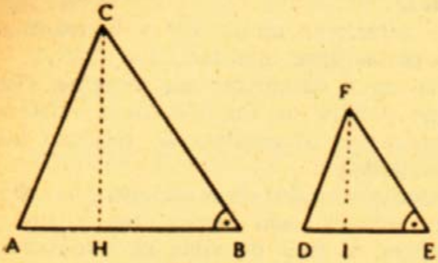


Fig. 212

Lados homólogos son los lados que unen dos vértices homólogos, o bien, son los lados que se oponen a ángulos iguales.

Ej.: AC y DF son lados homólogos.

Con relación a polígonos semejantes, se llaman *puntos homólogos*, los situados en el plano de esos polígonos, y que si se unen con los extremos de lados homólogos, dan lugar a $\triangle$s semejantes.

Ej.: H es homólogo con el punto I en Fig. 212.

Líneas homólogas son rectas que unen puntos homólogos. Ej.: CH es homóloga con FI. Fig. 212.

Razón de similitud o de semejanza es el número que expresa la razón constante k entre dos lados homólogos o dos líneas homólogas cualesquiera de polígonos semejantes.

En la figura 212 la razón de similitud es de $\frac{2}{3}$. Todas las líneas homólogas son entre sí como 2 : 3.

§ 2.—*CASOS DE SEMEJANZA DE TRIANGULOS*

Cuando dos $\triangle$s ABC y A'B'C' son semejantes, de acuerdo con la definición, deben satisfacer las 5 condiciones siguientes:

$\alpha = \alpha'$; $\beta = \beta'$; $\gamma = \gamma'$ ($\sphericalangle$s interiores)

CB : C'B' = CA : C'A' = AB : A'B' o sea, a : a' = b : b' = c : c'.

Estas 5 condiciones las cumplen, luego son semejantes:

1º Dos △s congruentes.

En efecto, tienen sus ∢s respectivamente iguales y la razón entre sus lados homólogos vale 1.

2º Dos △s equiláteros.

En efecto, sus **3** ∢s interiores miden 60º y la razón entre dos lados homólogos es siempre idéntica.

3º A continuación se va a demostrar un teorema (Teor. particular de Thales) que pondrá de manifiesto la existencia de △s que, sin ser congruentes ni equiláteros, realizan las 5 condiciones anteriores señaladas.

Este teorema juntamente con los 2 principios: a) **"2 figuras semejantes a una tercera, son semejantes entre sí"**; b) **"de 2 figuras congruentes, si una de ellas es semejante a una tercera, la otra también lo será"**, constituyen el fundamento para dejar establecido que existen, además, para los △s, 4 casos, en los cuales, cumpliéndose 2 condiciones de las 5 señaladas, forzosamente se cumplirán las otras tres.

Estos 4 casos son los llamados **"casos de semejanza de △s"** y son análogos a los 4 casos de congruencia de △s. A cada caso de congruencia corresponde uno de semejanza.

TEOREMA L.—(Particular de Thales).— **Toda paralela a un lado de un triángulo determina un segundo △ semejante al primero.** (Fig. 213).

Hip.) En △ ABC, HD ∥ AB.

Tes.) △ HDC ∼ △ ABC.

Dem.) ∢ C común

∢ H = ∢ α (Por corresp. ∥s)

∢ D = ∢ β (id.)

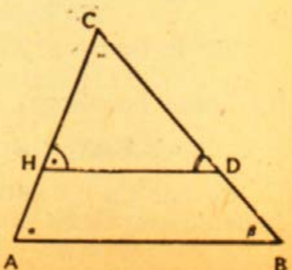


Fig. 213

y por ser HD || AB, $\dfrac{CH}{CA} = \dfrac{CD}{CB} = \dfrac{HD}{AB}$

Si los dos triángulos tienen iguales sus ángulos y los lados respectivamente proporcionales, son semejantes.

COROLARIO.—*La mediana de un triángulo es igual a la mitad del lado paralelo a ella.*

PRIMER CASO DE SEMEJANZA.—**Dos triángulos son semejantes si tienen dos ángulos respectivamente iguales.** (Fig. 214).

Hip.) $\sphericalangle A = \sphericalangle A'$
$\sphericalangle C = \sphericalangle C'$

Tes.) $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$

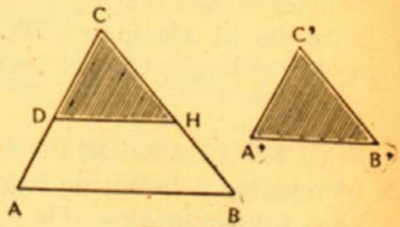


Fig. 214

Dem.) En el $\triangle$ ABC hacer $CD = C'A'$
y $DH \parallel AB$.
El $\triangle ABC \sim \triangle DHC$ (Teor. L).

Basta demostrar que $\triangle DHC \cong \triangle A'B'C'$.

por hipótesis	$\sphericalangle C = \sphericalangle C'$	(1)
por ser correspondientes entre ‖s	$\sphericalangle D = \sphericalangle A$	
pero por hipótesis	$\sphericalangle A = \sphericalangle A'$	
$\therefore$	$\sphericalangle D = \sphericalangle A'$	(2)
por construcción	$CD = C'A'$	(3)

$\therefore \quad \triangle DHC \cong \triangle A'B'C'$ (1.er caso Congr.)

Luego: $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$

PROBLEMA 15.—*Construir un △, dados:* α, β, t_c.

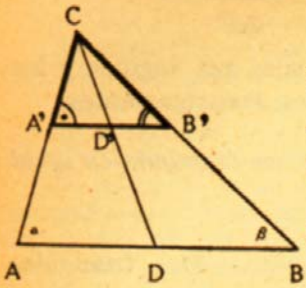


Fig. 215

Análisis.—Sea ABC el triángulo pedido y CD$=t_c$. (Fig. 215).

Trazar A'B'$\parallel$AB (Por D' punto arbitrario de CD).

Resulta: △A'B'C'∼△ABC (1.er Caso)
∴ ∢ A'$=\alpha$ y ∢ B'$=\beta$
y A'D'=**D'B'**.

El triángulo A'B'C es constructible. Sólo importa su forma determinada por α y β.

Para dar al triángulo A'B'C la magnitud pedida, basta que al prolongar CD', el trazo CD sea igual a t_c.

SEGUNDO CASO DE SEMEJANZA.—**Dos triángulos son semejantes si tienen un ángulo igual comprendido entre lados proporcionales.** (Fig. 216).

Hip.) ∢ C=∢ C'
CA : C'A'=CB : C'B'

Tes.) △ABC∼△A'B'C'

Dem.) En el △ABC hacer
CD=C'A'
y DH $\parallel$ AB

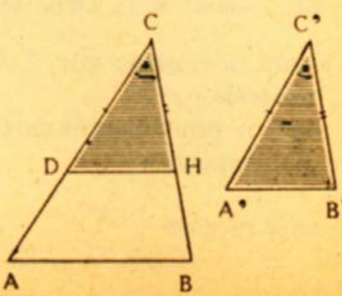


Fig. 216

entonces △ABC∾△DHC (Teor. L).

Basta probar que $\triangle DHC \cong \triangle A'B'C'$, y lo son pues:

por ser $DH \parallel AB$, $\quad CA : CD = CB : CH \quad$ (1)

y como $C'A' = CD$ (Por construcción)

prop. (1) se transforma en $\boxed{CA : C'A'} = CB : CH$ (2)

pero por Hip. $\quad \boxed{CA : C'A'} = CB : C'B'$

Resulta: $\quad CB : \mathbf{CH} = CB : \mathbf{C'B'}$ (3) (2 cant.)

$\therefore \quad CH = C'B'$ (Antecedentes =s de proporción) (3)

Pero $\quad CD = C'A'$ (Por construcción)

También: $\quad \sphericalangle C = \sphericalangle C'$ (Hip.)

$\therefore \quad \triangle DHC \cong \triangle A'B'C'$ (2º caso de $\cong$)

Luego: $\quad \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$

PROBLEMA 16.—*Construir un triángulo dados:*

$$\gamma, \ \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} = \frac{\mathbf{m}}{\mathbf{n}}, \ h_c$$

Análisis.— (Fig. 217).

Sea ABC el triángulo pedido

y $CH = h_c$

Sobre CA, hacer $CA' = n$

y sobre CB, " $CB' = m$.

resulta: $A'B' \parallel AB$.

y $\triangle A'B'C \sim ABC$ (2º caso).

$CH' \perp A'B'$

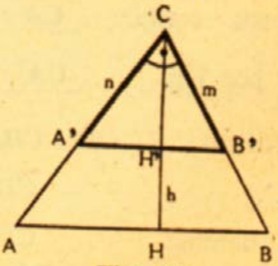


Fig. 217

El $\triangle A'B'C$ es constructible por conocer γ, m, n; tiene igual **forma** que el $\triangle$ pedido. Para darle la **magnitud** requerida, basta que al prolongar CH' el trazo CH sea igual a h_c.

TERCER CASO DE SEMEJANZA.—**Dos triángulos son semejantes si tienen dos de sus lados respectivamente proporcionales, y los ángulos opuestos a los mayores de estos lados, iguales.** (Fig. 218).

Hip.) $\begin{cases} CA : C'A' = CB : C'B' \\ CB > CA;\ C'B' > C'A' \\ \text{y } \measuredangle A = \measuredangle A' \end{cases}$

Tes.) $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$

Dem.) En el $\triangle$ ABC, hacer $CD = C'A'$
y $DH \parallel AB$
$\therefore$ $\triangle ABC \sim \triangle DHC$ (Teor. L)

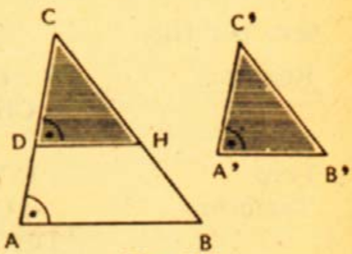


Fig. 218

basta probar que $\triangle DHC \cong \triangle A'B'C'$, y lo son, pues:

por ser $DH \parallel AB$, $CA : CD = CB : CH$

y como $C'A' = CD$ (Por construcción)

se puede escribir: $\boxed{\mathbf{CA : C'A'}} = CB : CH$ (2)

pero, por Hip. $\boxed{\mathbf{CA : C'A'}} = CB : C'B'$

Resulta: $CB : \mathbf{CH} = CB : \mathbf{C'B'}$ (3) (Dos cant. =s...)

$\therefore$ $CH = C'B'$ (Anteced. =s de prop. ant)

Además: $CD = C'A'$ (Por construcción)

y por Hip. $\measuredangle A = \measuredangle A'$

$\therefore$ $\triangle DHC \cong \triangle A'B'C'$ (3.er caso)

Luego: $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$

CUARTO CASO DE SEMEJANZA.—**Dos triángulos son semejantes si tienen los tres lados respectivamente proporcionales.** (Fig. 219).

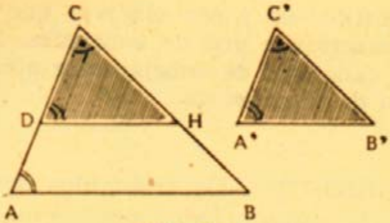


Fig. 219

Hip.) $CA : C'A' = CB : C'B' = AB : A'B'$
Tes.) $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$

Dem.) En el $\triangle$ ABC, hacer
$\mathbf{CD = C'A'}$
y $DH \parallel AB$

resulta el $\triangle ABC \sim \triangle DHC$ (Teor. L).
basta probar que: $\triangle DHC \cong \triangle A'B'C'$ y lo son, pues:
por ser $DH \parallel AB$, $CA : CD = CB : CH = AB : DH$
y como $C'A = CD$ (Por construcción)

Resulta: $\boxed{CA : C'A'} = CB : CH = AB : DH$

Pero por Hip. $\boxed{CA : C'A'} = CB : C'B' = AB : A'B'$

$$\therefore\ 1^{\circ}\ \frac{CB}{\mathbf{CH}} = \frac{CB}{\mathbf{C'B'}} \qquad \therefore\ \mathbf{CH = C'B'}$$

$$2^{\circ}\ \frac{AB}{\mathbf{DH}} = \frac{AB}{\mathbf{A'B'}} \qquad \therefore\ \mathbf{DH = A'B'}$$

También $CD = C'A'$ (Constr.)
$\therefore$ $\triangle DHC \cong \triangle A'B'C'$ (4.º caso)
Luego: $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$

OBSERVACION.—Se puede observar que a cada caso de congruencia corresponde uno de semejanza. Y que, en la demostración de cada caso de semejanza se aprovecha el correspondiente caso de congruencia.

COROLARIOS 1º.—**En triángulos semejantes:** *a ángulos iguales se oponen lados proporcionales; y, a lados proporcionales, se oponen ángulos iguales.*

Según este corolario, los teoremas de semejanza sirven para **probar la igualdad de ∢s y la proporcionalidad de trazos.**

Para ello: a) Se debe descubrir que realmente se cumplen las condiciones de uno de los 4 casos de semejanza; b) Se afirma que los △s son semejantes y c) se aplica el corolario anterior, sacando la conclusión que se necesita.

El corolario 1º es el más importante y el que más se emplea.

2º.—Dos △s rectángulos son semejantes si tienen un ∢ agudo igual. (1.er caso).

Esta proposición tiene muchas aplicaciones.

3º.—Dos △s rectángulos son semejantes si tienen los catetos respectivamente proporcionales. (2º caso).

4º.—Dos △s isósceles son semejantes cuando tienen igual el ∢ del vértice o uno de los ∢ basales.

5º.—Dos △s son semejantes cuando tienen sus lados respectivamente ||s o ⊥s. (Fig. 220 a y b).

Dem.—En ambos casos los △s tienen sus ∢s respectivamente iguales (1.er caso) Teor. 8º y 12º del 3.er A.

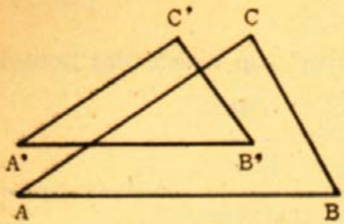


Fig. 220 a

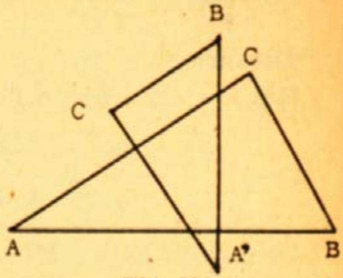


Fig. 220 b

OBSERVACION.—Para la claridad del razonamiento, se recomienda decir siempre en el mismo orden los vértices homólogos de dos △s semejantes.

§ *3.—APLICACIONES DE LA SEMEJANZA DE △s*

TEOREMA LI.—**Las alturas y bisectrices homólogas de dos triángulos semejantes son entre sí como dos lados homólogos.** (Fig. 221).

1.º Alturas:

Hip. $\begin{cases} \triangle ABC \sim \triangle MNL \\ CH = h_c \text{ y } LD = h_c' \\ \text{son alturas} \end{cases}$

Tes.) $\dfrac{h_c}{h_c'} = \dfrac{CA}{LM} = \dfrac{CB}{LN}$

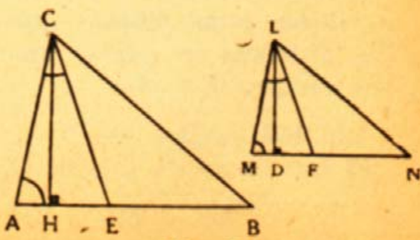


Fig. 221

Dem.) $\triangle$**AHC**$\sim\triangle$**MDL** (1.er caso)

$$\therefore \frac{h_c}{h_c'} = \frac{CA}{LM} \ldots \text{etc.}$$

2.º Bisectrices:

Hip.) $CE = b_\gamma$ y $LF = b_\gamma'$ son bisectrices homólogas

Tes.) $$\frac{b_\gamma}{b_\gamma'} = \frac{CA}{LM} = \frac{CB}{LM}$$

Dem.) $\triangle$AEC$\sim\triangle$**MFL** (1.er caso)

$$\therefore \frac{b_\gamma}{b_\gamma'} = \frac{CA}{LM} \ldots \text{etc.}$$

En general, en dos $\triangle$s semejantes, todas las *líneas homólogas* son respectivamente proporcionales dos a dos.

Si $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ resultará:

$a : a' = b : b' = c : c' = h_a : h_a' = b_\alpha : b_\alpha' = t_a : t_a' = p : p' = r : r' = u : u' = \rho : \rho'$, etc.

TEOREMA LII.—**Si un haz de rectas concurrentes a un mismo punto, se corta por dos paralelas, estas últimas quedan divididas en partes proporcionales.** (Fig. 222).

Hip. $EH \parallel AD$

El haz de rectas sale de O.

Tes.) $$\frac{EF}{AB} = \frac{FG}{BC} = \frac{GH}{CD}$$

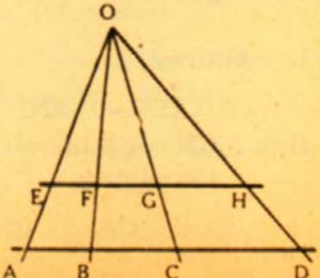


Fig. 222

Dem.) Los triángulos OEF, OFG, OGH, son respectivamente semejantes a los triángulos OAB, OBC, OCD.

Entonces
$$\frac{OE}{OA} = \frac{EF}{AB} = \frac{OF}{OB}$$
$$\frac{OF}{OB} = \frac{FG}{BC} = \frac{OG}{OC}$$
$$\frac{OG}{OC} = \frac{GH}{CD} = \frac{OH}{OD}$$

y relacionando las igualdades, resulta que:

$$\frac{EF}{AB} = \frac{FG}{BC} = \frac{GH}{CD}$$

(Q. E. D.)

PROBLEMA 16.—*Dividir un trazo dado AB en tres partes que sean entre sí como m:n:p* (m, n, p, son longitudes dadas). (Fig. 223).

En A'B' $\parallel$ AB se llevan, una a continuación de otra,

$A'D' = m$
$D'E' = n$
$E'B' = p.$

En seguida

$A'(\leftrightarrow) A \rightarrow \ldots O$
$B'(\leftrightarrow) B \rightarrow \ldots O$

Las rectas OD' y OE' efectúan la división pedida.

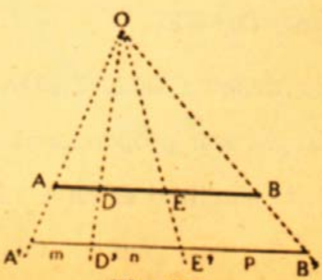


Fig. 223

En efecto, se tiene: AD : DE : EB=m : n : p.

Haz armónico *es la figura que se obtiene al unir un punto O cualquiera con los puntos A, B, X, Y, de una recta dividida armónicamente.*

Toda recta paralela a AB queda dividida armónicamente por los rayos del haz armónico.

TEOREMA LIII.—**Las transversales de gravedad de un triángulo, se cortan en un mismo punto, que divide a cada transversal en la razón de 1 : 2.** (Fig. 224).

Hip.) AE y BD transversales de gravedad del △ABC

Tes.) $\frac{OE}{OA}=\frac{OD}{OB}=\frac{1}{2}$

y la 3ª transversal pasa por O.

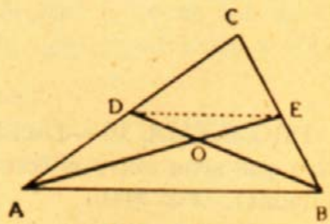


Fig. 224

Dem.) D(↔)E.

Se tiene: △DOE △BOA (1.er caso), luego los lados homólogos son proporcionales; y como DE $= \frac{1}{2}$ AB, la razón de similitud es de 1 : 2.

$$\therefore \qquad \frac{OE}{OA}=\frac{OD}{OB}=\frac{1}{2}$$

Como se eligieron dos transversales cualesquiera, la tercera transversal cortaría a BD en la razón de 1 : 2, es decir, en O.

Luego, las 3 transversales se cortan en un solo punto.

(Q. E. D.)

TEOREMA LIV.—**En un $\triangle ABC$ inscrito en una $\odot$ de radio r, el producto de dos lados es equivalente al producto de la altura correspondiente al tercer lado por el diámetro de la $\odot$ circunscrita.** (Fig. 225).

Tes.) $ab = h_c \cdot 2r$

Dem.) $A(\leftrightarrow)D$

Resulta: $\triangle$ CAD $\sim$ $\triangle$ CHB (1.er caso).

$\sphericalangle D = \sphericalangle B$ ($\sphericalangle$s inscr. que subtienden mismo arco AC)

y $\sphericalangle CAD = \sphericalangle H = 90°$.

$\therefore$ CA:CH=CD:CB

o sea: $b : h_c = 2r : a$

$\therefore ab = h_c \cdot 2r$. (Propiedad de las prop., pág. 226)

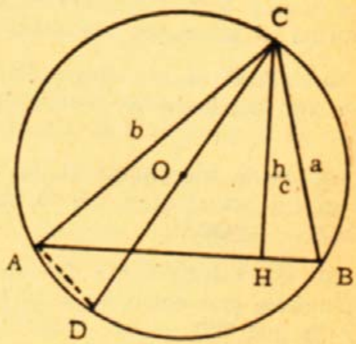


Fig. 225

EJERCICIOS DE APLICACION

• **84.** Los lados de un triángulo miden respectivamente: $a=4$ cm, $b=3$ cm, $c=6$ cm.

Se traza una paralela al lado c y esta paralela mide 4 cm. Calcular los segmentos determinados por ella en **a** y **b**.

85. En un triángulo ABC, $AB=5$ cm, $BC=8$ cm, $AC=7$ cm. Por un punto D de BC, tal que $BD=2$ cm, se trazan paralelas a los otros lados. Calcular el perímetro del paralelógramo así formado.

• **86.** Los lados de un triángulo ABC miden: $AB=12$ cm. $BC=11$ cm, $AC=9$ cm. Paralelamente a AB se traza $MN=10$ cm. Calcular las longitudes de los trazos AM, MC, NC, NB.

• **87.** Las bases de un trapecio miden 8 m y 12 m y los lados 3 m y 5 m. Calcular los lados del triángulo menor que se forma al prolongar los lados.

88. ¿Cuál es la altura del triángulo mayor obtenido al prolongar los lados no paralelos de un trapecio cuyas bases miden 27 m y 36 m y la altura 15 m.?

• **89.** Dado un ángulo O, en uno de los lados se lleva $OA=4$ cm.; y en el otro, $OB=2$ cm.; $OC=8$ cm. Demostrar que: $\sphericalangle OAB = \sphericalangle OCA$.

90. La bisectriz AD del ángulo A de un triángulo ABC, prolongada, encuentra en E la circunferencia circunscrita. Demostrar que $BE^2 = AE \cdot DE$.

91. En el rectángulo ABCD, AB es el doble de AD. Se une el vértice D con un punto E de AB, tal que $AE = \frac{1}{4}AB$.

La recta DE corta en F a la diagonal AC. Demostrar que cuadrilátero BCFE es inscriptible.

• **92.** Demostrar que en un paralelógramo, las distancias de un punto de una diagonal a dos lados adyacentes, son inversamente proporcionales a estos lados.

92'. Se da un △ isósceles ABC y con centro en el punto medio D de la base AB, se describe una O tangente a los otros dos lados; por un punto F de la ⊙ se traza una tangente que corta a los lados CA y CB en M y en N, respectivamente. Demostrar que $AD^2 = AM \cdot BN$.

93. En un △ ABC se trazan sus tres alturas $AA' = h_a$, $BB' = h_b$ y $CC' = h_c$. Demostrar las igualdades: a) $h_a \cdot A'H = A'C \cdot A'B$; b) $h_b \cdot B'H = B'C \cdot B'A$; c) $h_c \cdot C'H = C'A \cdot C'B$; siendo H el ortocentro del △ ABC.

93'. Dado un trapecio ABCD, determinar y construir una paralela a las bases, que sea dividida en tres segmentos iguales por los lados no paralelos y las diagonales.

• **94.** Demostrar que en un △ ABC dos alturas son inversamente proporcionales a los lados correspondientes.

• **95.** Demostrar que en △s semejantes los perímetros son entre sí como dos lados homólogos o dos líneas homólogas cualesquiera.

• **96.** Dos △s ABC y ABC' construídos sobre una misma base hacia un mismo lado, y que tienen igual altura, se cortan por una ∥ a la base común; probar que los segmentos de la ∥ interceptados por los lados de cada △, son iguales.

97. En un △ ABC las alturas AD y BE se cortan en H. Pruébese que △AHE ∼ △BHD.

x • **98.** En un △ las tres medianas forman un △ semejante al total.

99. Si se unen los 3 vértices de un △ ABC con un punto P situado fuera de él, y se marcan los puntos medios A', B' y C' de las rectas de unión, resulta que △ABC ∼ △A'B'C'.

100. Los lados de un △ABC son: $a = 15$; $b = 10$; $c = 20$; $h_c = 8$. Calcular h_a y h_b.

• **101.** Los lados de un $\triangle$ABC son a, b y c. Calcular los de otro $\triangle$ semejante al primero y construirlo, si el lado homólogo de a es p.

102. Construir un $\triangle$ cuyos lados sean, respectivamente, el duplo de los de otro $\triangle$ABC dado. ¿Serán o no semejantes estos dos $\triangle$s? ¿Por qué?

• **103.** Se da un $\triangle$ ABC circunscrito a una $\odot$ y se une el vértice C con el centro O de la $\odot$, hasta cortar el lado AB en D. Probar que: $(a+b) : c = CO : OD$.

104. En un $\triangle$ABC se aplican sucesivamente sobre AB a partir de A, los trazos $AE = EF = 1/5\ AB$ y se unen C con E y con F. Si se traza la transversal de gravedad t_b, probar que esta transversal dividirá una de las rectas de unión en la razón de 3 : 5 y la otra en la razón de 4 : 5.

104'. Por el vértice de un $\triangle$ABC se traza una $\parallel$ CX al lado AB y por el punto medio M de AB se traza una recta cualquiera que corta a AX en un punto N, al lado CB en un punto Q y a la prolongación de CA en un punto P. Demostrar que: $PN : PM = QN : QM$.

105. Se da un $\triangle$ABC inscrito en una $\odot$ de radio r; probar la siguiente relación: $S = \dfrac{abc}{4r}$. Generalice dicha relación, formulando o enunciando una proposición.

106. Se da un # ABCD y una transversal trazada desde A divide al lado DC en la razón de 1 : n. Probar que la misma recta divide a la diagonal BD en la razón de $\dfrac{1}{n+1}$. (Ejemplo $n = 5$).

• **107.** Dado un $\triangle$ ABC trazar una $\parallel$ a uno de sus lados de modo que el $\triangle$ determinado por dicha paralela tenga un perímetro dado 2s'.

• **108.** Dado un $\triangle$ ABC, trazar al lado AC una paralela MN de manera que: a) $AM+CN=s$; b) $AM—CN=d$ (s y d son trazos dados).

Construcciones basadas en la semejanza de $\triangle$s

Construir un $\triangle$ dados:

- • **109.** $a : b = m : n, \gamma, h_a$
- • **110.** $a : b = m : n, \gamma, c$
- • **111.** $a : b = m : n, \gamma, t_c$
- • **112.** $a : b = 4 : 3, \gamma, h_c$
- **113.** $a : b = 3 : 2, \gamma, r$
- **114.** $a : b = 3 : 2, \gamma, \rho$
- • **115.** $a : b = m : n, \gamma, p_c$
- • **116.** $a : b = m : n, \gamma, u$
- • **117.** $a : b : c = 4 : 3 : 5, t_a$
- **118.** $a : b : c = m : n : q, b_\gamma$
- **119.** $a : b : c = m : n : q, h_b$
- • **120.** $a : b : c = 3 : 4 : 5, b_\alpha$
- • **121.** $a : b_\gamma = 3 : 2, \gamma, \rho_c$
- **122.** $b : h_c = m : h, c, \gamma$
- **123.** $p : h_c = m : n, \gamma, h_a$
- • **124.** $b : c = m : n, \beta, t_b$
- • **125.** $c : t_c = 3 : 2, r, \gamma$
- **126.** $r : h_c = 3 : 2, b_\gamma, \gamma$
- **127.** $c + h_c, \alpha, p : q = m : n$
- • **128.** $h_c : t_c = m : n, \alpha, v$
- **129.** $(a+b+c) : h_c = m : n, \gamma, \rho_c$
- **130.** $b : t_c = m : n, t_a + t_b, \gamma$
- **131.** $b : b_\gamma = m : n, \alpha, a + b - c = d.$
- **132.** $c : \rho = m : n. \beta, b$

CAPITULO XII

POLIGONOS SEMEJANTES

§ 1.—DEFINICIONES Y PROPIEDADES

Polígonos semejantes *son polígonos que de igual número de lados tienen los ángulos respectivamente iguales y los lados homólogos proporcionales.*

Dos polígonos de más de tres lados pueden tener todos sus ángulos respectivamente iguales y no tener sus lados respectivamente proporcionales. En efecto, si se traza una paralela a un lado del polígono, todos los ángulos del nuevo polígono son iguales a los del primero, pero alguno de sus lados son iguales a los del primero y otros no.

Por *lados homólogos,* se entiende los lados cupos extremos están en vértices homólogos.

Por *vértices homólogos,* los vértices de ∢ homólogos.

Por ∢s *homólogos* los ∢s respectivamente iguales e igualmente dispuestos.

Así, en Fig. 226, los polígonos ABCDE y A'B'C'D'E' serán semejantes si se verifica que:

∢ABC=∢A'B'C'; ∢BCD=∢B'C'D', etc... y si al mismo tiempo se cumple en ellos que: AB : A'B'=BC : B'C'=...=k=constante, siendo homólogos los lados AB y A'B', BC y B'C', etc...

Suponiendo que $AB = \frac{3}{4} A'B'$, se tendrá que la razón constante AB : A'B'=...= 3 : 4, será *la razón de semejanza o similitud* de dichos polígonos.

TEOREMA LV.—**Dos polígonos semejantes pueden descomponerse en igual número de triángulos respectivamente semejantes, por las diagonales que, sin cortarse, parten de vértices homólogos.** (Fig. 226).

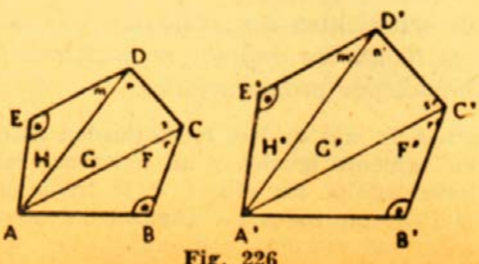


Fig. 226

Hip.) ABCDE∼A'B'C'D'E'
y AC, AD, A'C', A'D' son diagonales.

Tes.) Los triángulos H, G, F son semejantes a los triángulos H', G' F'.

Dem.) el $\triangle H \sim \triangle H'$ pues

por hipótesis $\sphericalangle E = \sphericalangle E'$

$$y \quad \frac{AE}{ED} = \frac{A'E'}{E'D'} \quad (2^{\circ} \text{ caso S.})$$

el $\triangle F \sim \triangle F'$ pues $\sphericalangle B = \sphericalangle B'$
por hipótesis

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'} \quad (2^{\circ} \text{ caso S.})$$

si $\triangle H \sim \triangle H'$ $\quad \sphericalangle m = \sphericalangle m'$
y como $\quad \sphericalangle D = \sphericalangle D'$
$\therefore \quad \sphericalangle n = \sphericalangle n' \qquad (1)$
y si $\triangle F \sim \triangle F'$ $\quad \sphericalangle r = \sphericalangle r'$
y como $\quad \sphericalangle C = \sphericalangle C'$
$\therefore \quad \sphericalangle s = \sphericalangle s' \qquad (2)$
luego, también

$$\triangle G = \triangle G' \quad (1.\text{er caso S})$$

COROLARIO.—*En polígonos semejantes, dos diagonales homólogas son entre sí como dos lados homólogos. Puede decirse lo mismo de todas las líneas homólogas de polígonos semejantes.*

TEOREMA (recíproco) LVI.—**2 polígonos compuestos del mismo número de triángulos semejantes y semejantemente colocados, son semejantes.** (Fig. 227).

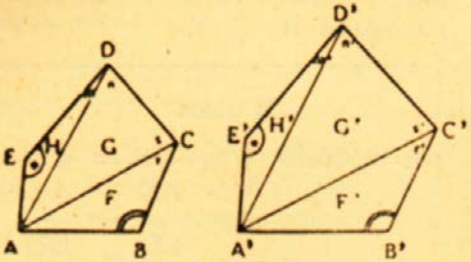


Fig. 227

Hip.) Los triángulos H, G, F son semejantes a los triángulos H', G', F' respectivamente.

Tes.) ABCDE $\sim$ A'B'C'D'E'

Dem.) Hay que demostrar la igualdad de ángulos y la proporcionalidad de lados.

si $\triangle H \sim \triangle H'$	$\sphericalangle E = \sphericalangle E'$
	$\sphericalangle m = \sphericalangle m'$
si $\triangle F \sim \triangle F'$	$\sphericalangle B = \sphericalangle B'$
también	$\sphericalangle r = \sphericalangle r'$
y si $\triangle G \sim \triangle G'$	$\sphericalangle s = \sphericalangle s'$
luego	$\sphericalangle C = \sphericalangle C'$
En la misma forma se prueba que:	$\sphericalangle D = \sphericalangle D'$
y	$\sphericalangle A = \sphericalangle A'$

si $\triangle F \sim \triangle F'$: $$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$$

$$\text{si } \triangle H \sim \triangle H': \quad \frac{DE}{D'E'} = \frac{EA}{E'A'} = \frac{AD}{A'D'}$$

$$\text{si } \triangle G \sim \triangle G': \quad \frac{AC}{A'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{AD}{A'D'}$$

A causa de esta última igualdad, se puede decir que

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DE}{D'E'} = \frac{EA}{E'A'}$$

Luego: $ABCDE \sim A'B'C'D'E'$.

TEOREMA LVII.—**Los perímetros de dos polígonos semejantes son entre sí como dos lados homólogos o como dos líneas homólogas.**

Hip.) $ABCD \sim A'B'C'D'$

Tes.) $\dfrac{a+b+c+d}{a'+b'+c'+d'} = \dfrac{a}{a'} = \dfrac{m}{m'}$

Dem.) Si $ABCD \sim A'B'C'D'$ $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'} = \dfrac{d}{d'} = \ldots \dfrac{m}{m'}$

y en una serie de razones iguales $\dfrac{a+b+c+d}{a'+b+c+d'} = \dfrac{a}{a'} = \ldots \dfrac{m}{m'}$

TEOREMA LVIII.—**Dos polígonos regulares de un mismo número de lados, son semejantes.**

Dem.) a) Tienen sus ∢s iguales (iguales a $\frac{n\ 2R - 4R}{n}$)

b) Existe una razón única entre sus lados homólogos: $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \ldots$

Luego dichos polígonos son semejantes.

COROLARIO 1º.—*En polígonos regulares de un mismo número de lados, los radios y las apotemas son entre sí como los lados.*

COROLARIO 2º.—*Los perímetros de dos polígonos regulares del mismo número de lados, son entre sí como sus radios o sus apotemas.*

Compás de reducción. Fig. 228

Para reducir las dimensiones de una figura (plano, mapa ...) a la tercera, cuarta, quinta ... parte se emplea un **Compás de reducción.**

Se compone de dos ramas iguales terminadas en puntas verticales.

Ambas ramas pueden girar alrededor de O.

Una de las reglas está graduada.

$\triangle AOC \sim \triangle BOD$

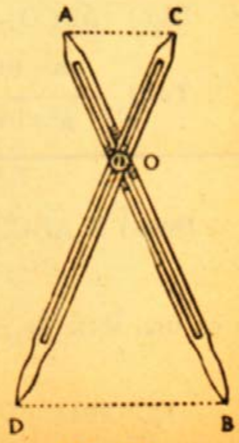


Fig. 228

$$\text{Si } OA = \frac{1}{2} OB$$

$$\text{también} \quad AC = \frac{1}{2} BD$$

La razón $\frac{OA}{OB}$ es graduable a voluntad.

§ 2.—*HOMOTECIA — SUS PROPIEDADES*

Homotecia es la parte de la Geometría que trata del estudio de las propiedades de las *figuras homotéticas.*

Se llaman **figuras homotéticas,** *figuras semejantes* que están dispuestas de tal modo que sus *lados homólogos son paralelos.* (Fig. 229).

TEOREMA LIX.—**Las rectas que unen vértices o puntos homólogos de polígonos homotéticos concurren a un mismo punto.** (Fig. 229).

Hip.) ABCD homotético con EFGH.

Tes.) AE, CG, BF, DH se cortan en el mismo punto, P.

Dem.) Supóngase que DH y CG se cortan en P y que BF corta en P'.

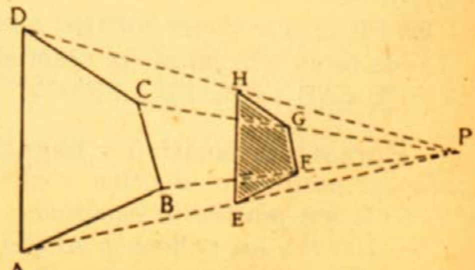


Fig. 229

se tendría: $PC : PG = CD : GH$

$P'C : P'G = CB : GF$

$CD : GH = CB : GF$ (Hipótesis)

$\therefore \quad PC : PG = P'C : P'G$ (Dos cantid. =s...)

y como existe un solo punto que divide exteriormente a CG en una razón dada, P y P' se confunden.

Las rectas que unen los vértices homólogos de polígonos homotéticos se llaman *rayos de similitud o de homotecia.*

Centro de similitud o de homotecia es el punto en que concurren todos los rayos de homotecia, en figuras homotéticas.

La razón constante entre las distancias del centro de similitud a dos vértices homólogos de polígonos homotéticos, se llama *razón de homotecia.* En Fig. 229 se tiene: $PA : PE = PB : PF = \ldots = k.$

Esta razón *es igual* a la razón de *semejanza o similitud,* es decir, igual a la que existe entre dos *lados homólogos* o dos *líneas homólogas cualesquiera* de los polígonos semejantes.

En Fig. 229 se tiene: $\triangle PAB \sim \triangle PEF; \triangle PBC \sim \triangle PFG$... etc... de estas semejanzas se desprende directamente que: $PA : PE = AB : EF = PB : PF = BC : FG = \ldots = k.$

Homotecia positiva y negativa.— La homotecia puede ser *positiva o negativa,* según que *la razón de homotecia* k sea *positiva o negativa.*

En Fig. 230, los polígonos ABCD y A'B'C'D' *son positivamente homotéticos* porque la razón de homotecia

$$\frac{OB}{OB'}, = \ldots = k, \text{ es positiva.}$$

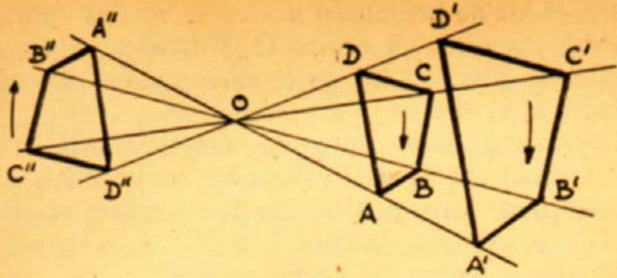


Fig. 230

Los polígonos ABCD y A"B"C"D" son *negativamente homotéticos* puesto que $\frac{OB}{OB''}$ es negativa.

En el primer caso, las figuras quedan a *un mismo lado del centro de similitud* y los rayos de similitud (radios vectores) tienen el *mismo signo*. (**Fig. 230**).

En el segundo caso, las dos figuras quedan *separadas por el centro de similitud o de homotecia* y los rayos de similitud son de *distinto signo*.

La homotecia positiva y negativa se suelen designar, respectivamente, con el nombre de homotecia **directa** e **inversa**. Sin embargo, este último término no es el más apropiado, puesto que los perímetros de las tres figuras homotéticas son recorridos siempre en el mismo sentido y los $\sphericalangle$s de las mismas tienen el mismo sentido. Fig. 230.

Cuando dos figuras planas son negativamente homotéticas, tal sistema, puede ser transformado en un sistema homotético positivo haciendo girar a una de las figuras en 180° alrededor del centro de similitud O, en el mismo plano.

Si la razón de homotecia $k = -1$, las dos figuras son simétricas respecto del centro O, y pueden sobreponerse mediante un giro de 180° en el mismo plano. En éste último caso, $k = +1$.

Sin embargo, si el centro de homotecia está en el infinito, la condición de ser la razón de homotecia $k = +1$, no es suficiente para que las figuras homotéticas puedan coincidir; se requiere, además, que los rayos de similitud sean iguales y tengan la misma dirección.

Dos figuras homotéticas son siempre semejantes. La propiedad recíproca no es cierta, porque dos figuras semejantes pueden ser o no homotéticas, pero siempre será posible colocarlas de manera que lo sean.

TEOREMA LIX'.—**Dos polígonos semejantes se pueden colocar siempre de manera que sean homotéticos, tanto positiva como negativamente.**

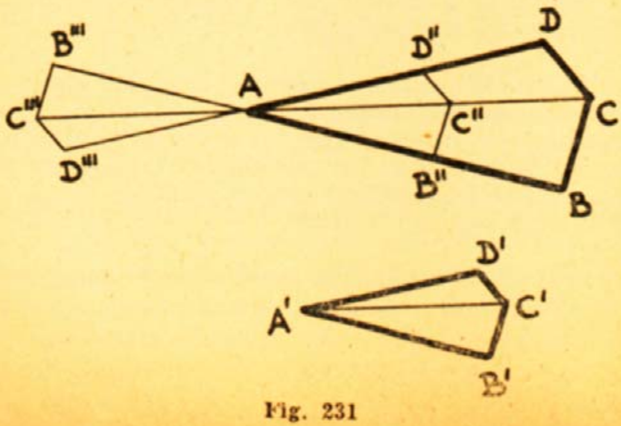


Fig. 231

Demostración.—Sean los polígonos semejantes dados ABCD y A'B'C'D' (Fig. 231).

1º Para obtener que sean positivamente homotéticos se hace AD''=A'B'; D''C'' || DC; D''C''=D'C'; C' (↔) C.

CC'' pasará necesariamente por A (teor. ejerc. Nº 56).

Por último se traza C''B'' || CB.

Resulta que el polígono AB''C''D'' es positivamente homotético del polígono ABCD (lados homólogos ||s).

Para dejar demostrada la tesis del teorema bastará hacer ver que A'B'C'D' tiene la posición de AB''C''D'', o sea, que estos dos polígonos son congruentes entre sí.

En efecto, lo son, porque tienen todos sus ángulos y lados respectivamente iguales: sus ángulos: $\sphericalangle A = \sphericalangle A'$ (por Hip.); $\sphericalangle D = D'$ (Hip) y $\sphericalangle D = \sphericalangle D''$ $\therefore$ $\sphericalangle D' = \sphericalangle D''$.

Del mismo modo, $\sphericalangle C' = \sphericalangle C''$; $\sphericalangle B' \leftrightarrow \sphericalangle B''$.

Sus lados: A'D'=AD'' (construcción); D'C'=D''C'' porque:

(1) DC : D'C' = AD : A'D' (Hip.)

(2) DC : D''C'' = AD : AD'' (cuadr. ABCD∼cuadr. AB''C''D'')

$\therefore$ DC : D'C' = D'C' : D''C'' (2.os miembros =s en 1 y 2)

$\therefore$ D'C' = D''C'' (antecedentes =s de últ. prop.)

Del mismo modo se puede demostrar que C'B'=C''B'' y que A'B'=AB''.

Luego cuadril. A'B'C'D' ∼ AB''C''D'' y positivamente homotético de cuadr. ABCD.

2º AB'''C'''D''' simétrico de AB''C''D'';

$\therefore$ A'B'C'D'≅AB'''C'''D'''.

Luego el cuadr. A'B'C'D' es en esta última posición negativamente homotético de cuadr. ABCD.

NOTA.—Se puede hacer notar que en la **similitud, las figuras semejantes** pueden tener una infinidad de posiciones diferentes en el plano, no sucede así en la homotecia, en la cual, la propiedad más importante es que en las **figuras homotéticas las líneas homólogas son paralelas.**

La homotecia es pues, un caso particular de la similitud.

De lo expuesto anteriormente se puede concluir:

1.º *La figura homotética de un punto, es otro punto que es colineal con el centro de similitud y con su homólogo.*

2.º *La figura homotética de una recta cualquiera es otra recta paralela a la primera.*

En efecto, en fig. 231 B'A' || BA es homotética de BA; B'C' || BC es homotética de BC. Como B'A' y B'C' tienen un punto común B' y ambas son ||s a la recta ABC, B'A y B'C' determinarán la || A'C' a la recta ABC.

3.º *La figura homotética de un segmento de recta o de un vector es otro segmento de recta u otro vector paralelo al primero.*

4.º *La figura homotética de un ángulo es otro ángulo igual al primero y del mismo sentido que aquel.*

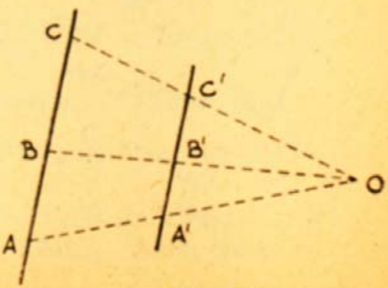


Fig. 232

En efecto cada lado del $\measuredangle$ dado tiene por homólogo una semirrecta paralela con él y del mismo sentido o de sentido contrario según que la homotecia sea positiva o negativa.

5.º *La figura homotética de un $\triangle$ es otro $\triangle$ semejante.*

6.º *La figura homotética de un polígono es otro polígono semejante al primero.*

7.º *La figura homotética de toda recta que pasa por el centro de homotecia es ella misma; recíprocamente, si una recta coincide con la homóloga, pasa por el centro.*

Para el segmento OA, fig. 231, el punto O es homotético de sí mismo y el homotético del punto A está sobre el radio OA.

8.º *La figura homotética de un círculo es otro círculo.*

9.º *La figura homotética de una curva es otra curva.*

Las tangentes a dos curvas homotéticas en dos puntos homólogos son $\parallel$s.

Demostración. — Sean A y B dos puntos de la curva L, y A' y B' los puntos homólogos correspondientes de la curva L'. Fig. 233.

Siendo las curvas L y L' homotéticas las cuerdas AB $\parallel$ A'B'.

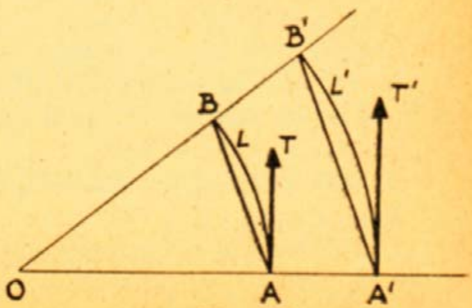


Fig. 233

Si el punto B se aproxima al punto A, permaneciendo siempre sobre la curva L, el punto B', en iguales condiciones, se aproximará al punto A', las cuerdas AB y A'B' permanecerán durante este desplazamiento constantemente ||s. En la posición límite, esto es, cuando lleguen a ser tangentes seguirán siendo ||s. Luego AT || A'T'.

TEOREMA LIX'.—**Dos ⊙s cualesquiera, son a la vez positiva y negativamente homotéticas.**

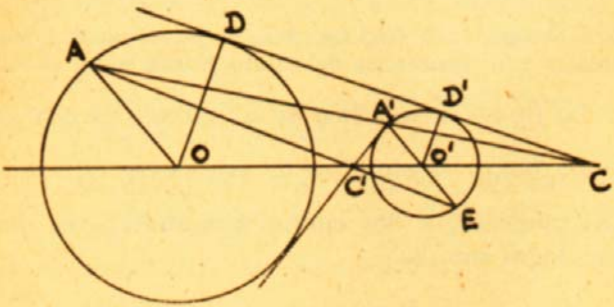


Fig. 234

Sean O y O' las ⊙s dadas y sus radios r y r'. Se traza OA || O'A' y la secante CA'A hasta su intersección con la línea de los centros OO' prolongada.

Resulta △ COA∼CO'A'

∴ CO : CO'=CA : CA'=OA : OA'=r : r'

Pero siendo CO : CO' r : r', razón constante, cualquier otra secante o tangente que una dos puntos homólogos de ambas ⊙s (extremos de radios ||s) debe pasar por C (teor. XXXIX.

Luego C es el centro de homotecia para las ⊙s O y O' y como sus radios tienen mismo sentido, las ⊙s son positivamente homotéticas.

Si se consideran los radios OA ∥ O'E y de sentido contrario, se tendrá:

$$\frac{\overline{C'O}}{\overline{C'O'}} = \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'E}} = -\frac{\overline{OA}}{\overline{O'E}} = -\frac{r}{r'}$$

y las ⊙s serán negativamente homotéticas respecto del centro de homotecia C'. Las tangentes comunes exteriores de las ⊙s, como DD'C, pasan por el centro de homotecia positiva C. Las tangentes comunes interiores, como L, pasan por el centro de homotecia positiva negativa C'.

Elementos que determinan la homotecia.— La homotecia queda definida:

a) *Por el centro de homotecia y un par de puntos homólogos;*

b) *Por dos segmentos homólogos paralelos;*

c) *Por la razón de homotecia y el centro de homotecia.*

§ 3.—APLICACIONES DE LA HOMOTECIA

PROBLEMA 17.—*Construir un polígono que tiene un lado conocido semejante a otro dado.*

Sea ABCD el polígono dado y a' el lado del polígono ∼ pedido.

a) *El centro de homotecia queda fuera del polígono dado.* (Fig. 235).

Solución.—Se hace:
A'B' || AB
y A'B'=a' (el lado dado).

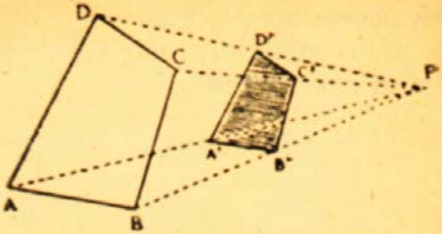


Fig. 235

Se trazan los rayos de homotecia AA' y BB' hasta su intersección en el punto **P.** Este punto será el centro de similitud de los polígonos.

Se trazan todos los demás rayos de homotecia uniendo P con los vértices del polígono dado:

Rayos CP y DP

Se hace: B'C' || BC y C'D' || CD
A' (↔) D'

A'B'C'D' polígono pedido. ¿Cuántas soluciones hay?

b) *El centro de homotecia queda dentro del polígono dado.* (Fig. 236).

Se hace: A'B' || AB (en el interior del polígono).

y A'B'=a'

Se trazan los rayos de homotecia y B'C'||BC.
C'D' || CD . . . etc. mismo camino del caso anterior **a.**

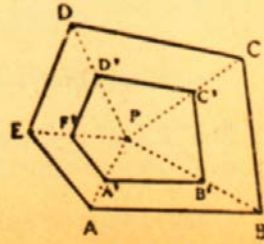


Fig. 236

c) *El centro de homotecia queda en un vértice del polígono dado.* (Fig. 237).

Se hace AB'=a'.

Se trazan los rayos de homotecia y B'C"||BC. . . etc.

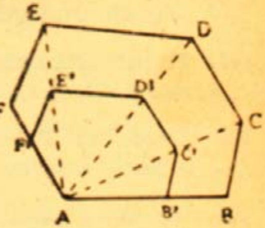


Fig. 237

d) *El centro de homotecia queda en un punto situado en un lado del polígono.*

e) *El centro de homotecia queda entre los dos polígonos homotéticos.* (Fig. 230).

PROBLEMA 18.—*Por un punto dado P trazar la recta que pasa por el vértice del ángulo que formarían dos rectas L y L' que no pueden prolongarse.* (Fig. 238).

Por P se trazan PM y PN de modo que corten las rectas en M y N.

M(↔)N

Por cualquier punto M' de L se trazan: M'N' || MN y M'P' || MP en seguida N'P || NP

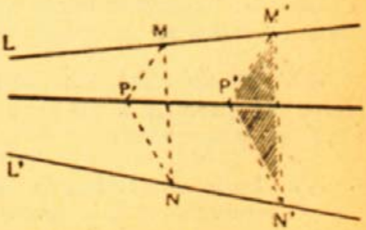


Fig. 238

PP' es la recta pedida, porque los triángulos MPN y M'P'N' son homotéticos.

EJERCICIOS

133. En un triángulo dado, inscribir un cuadrado.

134. En un triángulo, inscribir otro triángulo cuyos lados sean paralelos a tres rectas dadas.

135. Desde un **P** exterior a una ⨀ trazar una secante tal, que la parte exterior sea igual a la parte interior.

* **136.** En una ⨀ dada inscribir un triángulo semejante a otro triángulo dado.

* **137.** Circunscribir a una ⨀ dada un triángulo que sea semejante a otro triángulo lado.

138. En un semicírculo inscribir un cuadrilátero semejante a otro cuadrilátero dado y que tenga dos vértices en el diámetro y los otros dos en la circunferencia.

139. ¿Cuál es la razón de los perímetros de dos triángulos equiláteros que tienen por lado 10 m y 18 m respectivamente?

140. Un triángulo tiene por lados 12, 25 y 32 m; ¿cuánto miden los lados de un triángulo semejante y de perímetro triple?

141. En un rectángulo ABCD, AB = 6 cm y BC = 9 cm. Trazar EF paralela a AB de modo que los rectángulos ABFE y ABCD sean semejantes.

142. Dado un rectángulo ABCD, se baja desde cada vértice una perpendicular a la diagonal opuesta. Demostrar que los pies de estas perpendiculares son los vértices de un rectángulo semejante al dado.

* **143.** Describir una circunferencia que pase por un punto dado P y sea tangente a dos rectas dadas L y L'.

CAPITULO XIII

RELACIONES METRICAS EN EL TRIANGULO RECTANGULO

TEOREMA LX.—**En todo △ rectángulo la altura bajada desde el vértice del ángulo recto es media proporcional geométrica entre las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa.** (Fig. 239).

Hip.) △ ABC es △ rect.
$CH = h_c$.

Tes.) $h_c^2 = p \cdot q$.

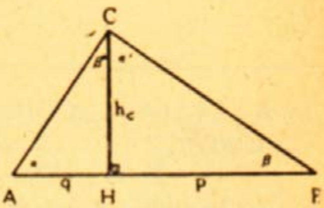


Fig. 239

Dem.) $\triangle AHC \sim \triangle CHB$.

porque: 1º $\sphericalangle AHC = \sphericalangle BHC$ (=90°)
2º $\sphericalangle \alpha = \sphericalangle \alpha'$ (lados ⊥s) (1.er caso)

si los triángulos son semejantes, sus lados homólogos son proporcionales.

$$\therefore \quad q : h_c = h_c : p.$$

(Q. E. D.)

Haciendo el producto de los medios igual al producto de los extremos se tiene la demostración del 2º teorema de Euclides (el referente a la altura) cuyo enunciado se puede ver en la pág. 139.

o sea que:

$$\boxed{h_c^2 = p. \, q.}$$

(Q. E. D.)

TEOREMA LXI.—**"Un cateto de un triángulo rectángulo es ½ p. g. entre la hipotenusa y la proyección de dicho cateto sobre ella".** (Fig. 240).

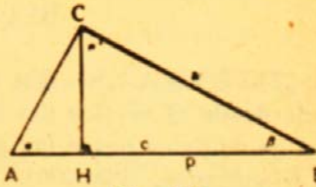


Fig. 240

Hip.) $\triangle ABC$ es rectángulo
$CH = h_c$.

Tes.) $\begin{cases} a^2 = c \cdot p \\ b^2 = cq \end{cases}$

Dem.) $\triangle ABC \sim \triangle CBH$. (1.er caso de semejanza de Δs).

En efecto, 1º $\beta = \beta$ ($\measuredangle$ común)

2º $\measuredangle ACB = \measuredangle CHB = 90°$

Si los triángulos son semejantes, las lados homólogos son proporcionales;

Luego: $c : a = a : p$

Del mismo modo: $c : b = b : q$

En la proporción anterior, haciendo el producto de los medios igual al de los extremos, resulta demostrado el 1.er teorema de Euclides (el referente al cateto) cuyo enunciado puede verse en la pág. 138.

O sea que:

$$\boxed{a^2 = c \cdot p}$$

De igual forma se puede demostrar que $b^2 = cq$.

TEOREMA LXII.—(Particular de Pitágoras).—**"El cuadrado construído sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo, es equivalente a la suma de los cuadrados construidos sobre los catetos".** (Fig. 114).

Hip). $\triangle ABC$, $\triangle$rectángulo.

Tes.) $c^2 = a^2 + b^2$

Dem.) $a^2 = cp$ (1.er teor. de Euclides)

$b^2 = cq$

Sumando $a^2+b^2=cp+cq$

$a^2+b^2=c\ (p+q)$

pero $p + q = c$

luego $a^2+b^2=c^2$

o $\boxed{c^2=a^2+b^2}$ (Q. E. D.)

También se puede escribir: $a^2=c^2-b^2=(c+b)\,(c-b)$

$b^2=c^2-a^2=(c+a)\,(c-a)$

$c = \sqrt{a^2+b^2}$

$a = \sqrt{c^2-b^2}$

$b = \sqrt{c^2-a^2}$

También se puede demostrar fácilmente que en un triángulo rectángulo:

$$\boxed{ab = c\ h_c}$$

TEOREMA GENERAL DE PITAGORAS LXIII.—**"En cualquier triángulo, el cuadrado de un lado opuesto a un ángulo agudo, es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, menos el duplo del producto de uno de ellos, por la proyección del otro sobre él".** (Fig. 241).

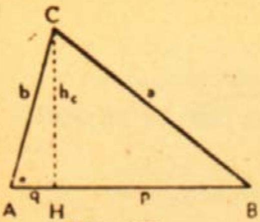


Fig. 241

Hip.) $\alpha < 90^\circ$

$CH = h_c$

Tes.) $a^2 = b^2 + c^2 - 2cq$

Dem.) $a^2 = h_c^2 + p^2$

$h_c^2 = b^2 - q^2$

y como $p = c - q$

$p^2 = c^2 + q^2 - 2cq$

Sumando miembro a miembro:

$$h_c^2 + p^2 = b^2 + c^2 - 2cq$$

Luego: $$a^2 = b^2 + c^2 - 2cq$$

(Q. E. D.)

NOTA.—Si $\alpha > 90^\circ$, se tiene: $p = c + q$ entonces resulta:

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2\ cq.$$

Cálculo de las alturas de un triángulo en función de los 3 lados. (Fig. 242).

$$h_c^2 = a^2 - p^2$$

Calculamos p^2 ($\beta < 90^\circ$).

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2cp.$$

$$\therefore p = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2c}$$

$$p^2 = \frac{(a^2 + c^2 - b^2)^2}{4c^2}$$

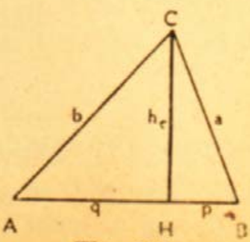


Fig. 242

reemplacemos p^2 en la primera ecuación

$$h_c^2 = a^2 - \frac{(a^2+c^2-b^2)^2}{4c^2}$$

$$h_c^2 = \frac{4a^2c^2-(a^2+c^2-b^2)^2}{4c^2}$$

$$h_c^2 = \frac{(2ac+a^2+c^2-b^2)\ (2ac-a^2-c^2+b^2}{4c^2}$$

$$h_c^2 = \frac{1}{4c^2}\ (a^2+2ac+c^2-b^2)\ (b^2-[a^2-2ac+c^2])$$

$$h_c^2 = \frac{1}{4c^2}\ [(a+c)^2-b^2]\ [b^2-(a-c)^2]$$

$$h_c^2 = \frac{1}{4c^2}\ (a+c+b)\ (a+c-b)\ (b+a-c)\ (b-a+c)$$

$$h_c^2 = \frac{1}{4c^2}\ 2s \cdot 2(s-b) \cdot 2(s-c) \cdot 2(s-a)$$

$$h_c = \frac{2}{c}\sqrt{s(s-a)\ (s-b)\ (s-c)}$$

Fórmula de Herón de Alejandría (229-284 A. de C— *La superficie de un triángulo ABC en función de los tres lados.*

Si $\qquad h_c = \frac{2}{c}\sqrt{s\ (s-a)\ (s-b)\ (s-c)}$

$$S_{\text{triang. ABC}} = \frac{1}{2} c\, h_c = \frac{1}{2} c \cdot \frac{2}{c}\sqrt{s(s-a)\ (s-b)\,(s-c)}$$

Luego: $S_{\text{triang. ABC}} = \sqrt{s\ (s-a)\ (s-b)\ (s-c)}$

Fórmula de la superficie de un triángulo ABC en función de los radios de las circunferencias inscritas y ex-inscritas.

$$S = s\,\rho$$
$$S = \rho_a\,(s-a)$$
$$S = \rho_b\,(s-b)$$
$$S = \rho_c\,(s-c)$$

Multiplicando m. a m. las 4 igualdades

$$S^4 = s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)\,\rho\rho_a\,\rho_b\,\rho_c$$
$$S^4 = S^2 \cdot \rho \cdot \rho_a \cdot \rho_b \cdot \rho_c$$
$$S^2 = \rho\rho_a\rho_b\rho_c$$
$$S = \sqrt{\rho\,\rho_a\,\rho_b\,\rho_c}$$

EJERCICIOS DE APLICACION

• **144.** Calcular la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 20 m y 21 m.

• **145.** Calcular la diagonal de un rectángulo cuyas dimensiones son 15 m y 8 m.

• **146.** Calcular los dados de un rombo, cuyas diagonales miden 6 m y 8 m.

147. ¿Por qué es rectángulo todo triángulo cuyos lados son entre sí como 3 : 4 : 5?

148. Colocado verticalmente a 4 m de la orilla de un río. un palo sobresale 3 m; inclinado, su extremo toca la ribera. ¿Cuál es la profundidad del río?

• **149.** En un $\triangle$ rectángulo ABC, $h_c = 9{,}6$ y la hipotenusa $c = 20$. Calcúlense los dos catetos.

• **150.** En un triángulo rectángulo un cateto vale la mitad de la hipotenusa, y el cuadrado de ésta es 256 m^2. ¿Cuál será la longitud de los catetos?

• **151.** En un triángulo rectángulo (△ R.) calcular: a, b, h_c, p, q, si $a+b=35$ m y $c=25$ m.

152. En un △ R., calcular h_c si $a = 8$ m y $b = 6$ m.

• **153.** En un △ R., calcular a, b, si $p = 32$ m y $q = 18$ m.

• **154.** En un △ R., calcular a y b si $p : q = 9 : 16$ y $h_c = 12$ m.

• **155.** En un △ R., calcular a, p, q, si $b=15$ m y $h_c=12$ m.

• **156.** En un △ R., calcular a, b, p, q, si $h_c=9$; $p-q=5{,}25$ m.

157. En un △ R. se tiene $c = 100$ m, $a = 60$ m. Calcular el perímetro de cada uno de los triángulos parciales determinados por la altura.

158. Demostrar que para todo punto situado dentro de un rectángulo, se verifica que la suma de los cuadrados de las distancias a dos vertices opuestos, es igual a la suma de los cuadrados de las distancias a los otros dos.

• **159.** Demuestre que si en un cuadrilátero las diagonales se cortan perpendicularmente, la suma de los cuadrados de dos lados opuestos es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados.

• **160.** En un triángulo ABC la altura $CH = 6$ cm divide la base en dos segmentos $HA = 3$ cm y $HB = 2$ cm. Calcular los lados CA y CB y el radio **r** del círculo circunscrito al triángulo.

161. En un círculo de 4 cm de radio, se inscribe un triángulo ABC, tal que $AB=4{,}8$ cm y $AC=6$ cm. Determinar la longitud del lado BC.

• **162.** En un △ ABC, $CA = CB$. La altura h_c vale 8 m y el radio de la circunferencia circunscrita es de 5 m. Calcular los lados del triángulo.

• **163.** Calcular el radio del círculo circunscrito a un triángulo de lados $a = 39$ mm. $b = 60$ mm, $c = 63$ mm.

• **164.** Demostrar que en un $\triangle$ rectángulo los cuadrados de los catetos son entre sí como sus proyecciones sobre la hipotenusa.

• **165.** Se da un $\triangle$ equilátero cuyo lado mide 10 cm. ¿Cuánto mide su altura?

• **166.** Si el lado de un $\triangle$ equilátero vale l, calcular la altura en función de l. **Retenga ese valor.**

• **167.** Si en un $\triangle$ equilátero $h = 5\sqrt{3}$ cm. ¿Cuánto mide el lado?

168. En un $\triangle$ rectángulo isósceles, $c = 6$ m. Calcular a y b.

169. En un $\triangle$ ABC, $a=15$; $b=20$; $c=7$. Calcular p.

170. En un $\triangle$ isósceles ABC, $h_c = 20$; $a = 24$ cm. Calcular el área.

• **171.** El área de un $\triangle$ equilátero es $25\sqrt{3}$. Calcular 1º su altura; 2º calcular su base.

• **172.** Demostrar que si sobre un mismo trazo AB, como hipotenusa, se construyen varios $\triangle$s rectángulos: ABC, ABC', ABC" . . . etc. se verifican las siguientes relaciones:

$$a^2 : a'^2 : a''^2 \ldots = p : p' : p'' \ldots \text{etc.}$$

173. Demostrar que en un $\triangle$ ABC se cumplen las siguientes relaciones:

1) $a^2+b^2 = 2\left(\dfrac{c}{2}\right)^2+2t_c^2$

2) $a^2+4t_a^2 = 2b^2+2c^2$

Formular estos resultados por medio de una proposición.

3) En el mismo $\triangle$, calcular p y q en función de sus lados a, b y c.

174. En un $\triangle$ ABC rectángulo en C, el ángulo α mide 60° Determinar en qué razón la bisectriz de este ángulo divide al lado BC y a la altura CH.

* **175.** En un trapecio isósceles ABCD, los lados no paralelos son iguales a la base menor CD = 10 cm. Los ángulos en A y en B, miden 60º.

Calcular la base mayor, la altura y la diagonal del trapecio.

176. En un trapecio ABCD, rectángulo en A y D, el ángulo B vale 60º y la diagonal AC es perpendicular a BC. Calcular los lados y la diagonal del trapecio sabiendo que la base menor vale 10 cm.

177. Calcular el radio del círculo inscrito en un triángulo rectángulo cuyos catetos son a = 7 m y b = 24 m.

* **178.** Un triángulo rectángulo está inscrito en un círculo de 37 m de diámetro y circunscrito a un círculo de 5 m de radio.

Calcular los catetos.

179. Demostrar que si dos triángulos rectángulos son semejantes, $cc' = aa' + bb'$.

180. En un triángulo ABC la base AB=36 mm queda fija y el vértice C es variable. Se da la relación $\overline{CA}^2 + \overline{CB}^2 = 2960$. Calcular la transversal de gravedad CM. Hallar el lugar geométrico del vértice C. (Se hará ver que es una circunferencia cuyo centro es el punto medio de AB).

181. Dado un segmento fijo AB=a, determinar y construir el lugar geométrico de los puntos P tales que $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 = 2a^2$. ¿Cuál es la altura máxima de los triángulos PAB?

182. Dado un segmento fijo de longitud AB=a, determinar el lugar geométrico de los puntos P tales que $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 = k^2$ (siendo k una longitud dada). (Se determinará primero la longitud de la proyección de la transversal de gravedad relativa a AB y de ello se deducirá que el lugar buscado es una circunferencia). Discutir.

183. En un triángulo ABC de base fija $AB = 8$ cm de vértice C variable, se tiene $CA^2 - CB^2 = 12$. Determinar la longitud de la proyección de la transversal de gravedad CM sobre AB. Deducir de ello que el lugar geométrico del vértice C es una perpendicular a AB. Situar el pie H de esta perpendicular con respecto al punto medio M de AB.

184. Siendo AB un segmento dado de longitud a, ¿cuál es el lugar geométrico de los puntos P tales $PA^2 - PB^2 = k^2$ siendo k una longitud dada? Construir el lugar en los casos particulares siguientes: 1º $k^2 = 2a^2$; 2º $k^2 = a^2$; 3º $k^2 = o$. Interpretar este último caso particular recordando proposiciones generales conocidas.

CAPITULO XIV

RELACIONES METRICAS EN EL CIRCULO

TEOREMA LXIV.—**Si dos cuerdas de un círculo se cortan, el producto de los segmentos de una de ellas, es igual al producto de los segmentos de la otra.** (Fig. 243).

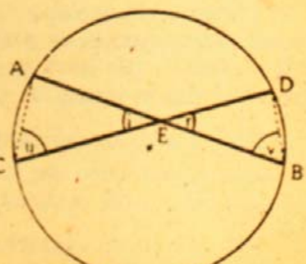


Fig. 243

Hip). Las cuerdas AB y CD se cortan en E.

Tes.) $AE \cdot EB = CE \cdot ED$.

Dem.) $\sphericalangle u = \sphericalangle v$ ($\sphericalangle$s inscritos que comprenden = arco)

$\sphericalangle i = \sphericalangle r$. (op. vértice)

luego,

$\triangle CEA \sim \triangle BED$ (1.er caso)

$$\therefore \frac{CE}{AE} = \frac{EB}{ED}$$

Haciendo el producto de los medios, igual al producto de los extremos, resulta: $AE \cdot EB = CE \cdot ED$.

COROLARIO.—*La mitad de una cuerda que queda dimidiada por otra es ½ p. g. entre los segmentos de ésta.*

TEOREMA LXV.—**Dos secantes que salen de un mismo punto, situado fuera de un círculo, son inversamente proporcionales a sus segmentos externos** (Fig. 244).

Hip.) Las secantes PA y PC se cortan en P.

Tes.) $\dfrac{PA}{PC} = \dfrac{PD}{PB}$

Dem.) Unir A con D y C con B

$\triangle APD \sim \triangle CPB$ (.er caso)

En efecto:

1º) $\sphericalangle P$ común

2º) $\sphericalangle i = \sphericalangle r$ (Teor. IX, corol 1)

luego: $\dfrac{PA}{PC} = \dfrac{PD}{PB}$

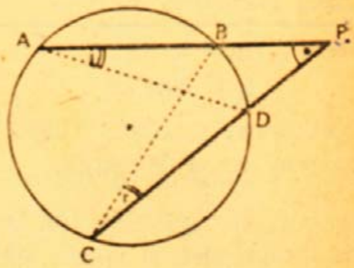


Fig. 244

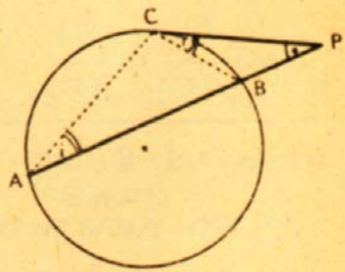
(Q. E. D.)

COROLARIO.—*Si por un punto situado fuera de un círculo, se trazan dos secantes, el producto de una secante por su segmento exterior, es igual al producto de la otra secante por su parte exterior.*

Pues si, $$\frac{PA}{PC} = \frac{PD}{PB}$$

resulta que $$PA \cdot PB = PC \cdot PD.$$

TEOREMA LXVI.—**Si por un punto situado fuera de un círculo, se trazan una tangente y una secante, la tangente es media proporcional geométrica entre la secante entera y su segmento exterior.** (Fig. 245).



Hip.) PC es tangente y
PA es una secante

Tes.) $PC^2 = PA \cdot PB$.

Dem.) Unir A con C
y C con B;

entonces $\triangle ACP \sim \triangle CBP$
porque: 1.° $\measuredangle$ P común;

2.° $\measuredangle i = \measuredangle r$ (el $\measuredangle$ i inscrito y el $\measuredangle$ r semi-inscrito, comprenden el mismo arco BC).

luego: $$\frac{PB}{PC} = \frac{PC}{PA}$$

y $$PC^2 = PA \cdot PB.$$

Potencia de un punto P respecto de una ⊙.—*Es el producto constante de las distancias de este punto a los 2 puntos de intersección de la ⊙ con la recta trazada por el punto considerado.*

Ej.: $PD \cdot PE = PB \cdot PC = PF^2 = k^2$ (Fig. 246 a) o bien, $PD \cdot PE = PF \cdot PG = PB \cdot PC = k^2$ (Fig. 246 b).

Dicha recta puede ser una cuerda o una secante cualquiera. y aun la tangente, trazadas por dicho punto.

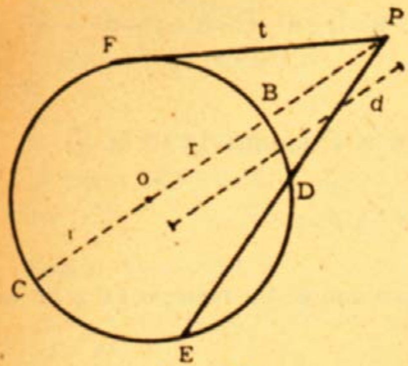


Fig. 245

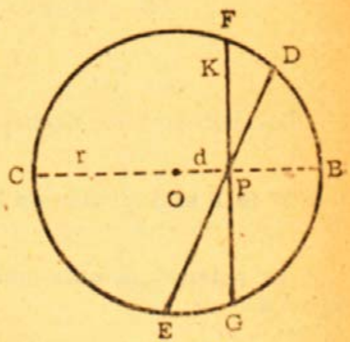


Fig. 246

Cálculo de la potencia de un punto en función de la distancia del punto al centro O de la ⨀.—Se traza el diámetro BC que pasa por P. Fig. 246 a y b).

Sea la distancia $OP = d$; el radio de la ⨀ $= r$; $PF = t$.
Hay que calcular el producto $PE \cdot PD$.

1º Si P es exterior a la ⨀, $d > r$. Fig. 246 a.

Se tiene: $PC = d + r$; $PB = d - r$

$$PE \cdot PD = PC \cdot PB = PF^2 = (d+r)(d-r) = d^2 - r^2 = t^2$$

La potencia de un punto respecto de una ⨀ es igual al cuadrado de la tangente.

La potencia es negativa si P es exterior a la ⊙.

2º Si P es interior a la ⊙, $d < r$. Fig. 246 b.

$$PC = r + d;\ PB = r - d;\ PF = PG = k = 1/2FG.$$

$$PE \cdot PD = PC \cdot PB = (r+d)\ (r-d) = r^2 - d^2 = -k^2.$$

La potencia es negativa si P es interior a la ⊙.

3º Si P está situado en la ⊙, $d = r$.

La potencia es nula porque uno de los factores PC o PB es igual a 0

4º Si P se halla en el centro de la ⊙, la potencia es igual $-r^2$.

¿Cuál es el L. G. de los puntos que tienen igual potencia respecto de una ⊙ dada?

APLICACIONES GRAFICAS

a) *Hallar la media proporcional geométrica entre dos segmentos dados* "**a**" *y* "**b**".

Siendo: $a < b$

1.a Solución.—1° Se traza la recta indefinida o eje horizontal AB. (Fig. 247).

2° Se hace: AH=a

3° HB=b

4° semi ⊙ de diámetro AB.

5° HC⊥AB

El trazo HC=M. p. g. entre a y b.

Dem.—A(↔)C(↔)B

ABC △ rect. en C (Teor. de Thales, pág. 37).

Se aplica teor. LX.

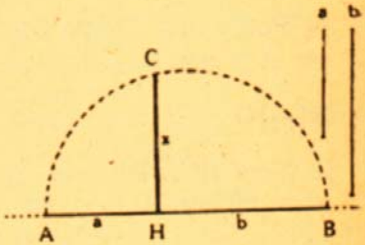


Fig. 247

2.a Solución.—1° Se traza la recta indefinida o eje horizontal AB. (Fig. 248).

2° Se hace: AH=b

3° AB=a

4° semi ⊙ de diámetro AH=b (sobre el trazo mayor).

5° BC⊥AH

A(↔)C.

Trazo AC=M. p. g. entre a y b.

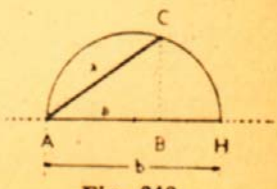


Fig. 248

Dem.—C(↔)H

ABC △ rect. en C. Aplíquese teor. LXI.

3.a Solución.—(**Fig. 249**). 1º Sobre un eje horizontal se aplican las longitudes

AH=a y HB=b

2º Se dibuja una ⊙ que pase por A y por B.

3º H(↔)O

4º Se traza HC⊥HO
El trazo HC es M. p. g. entre a y b.

Dem.) Corol. de Teor. LXIV pág. 280.

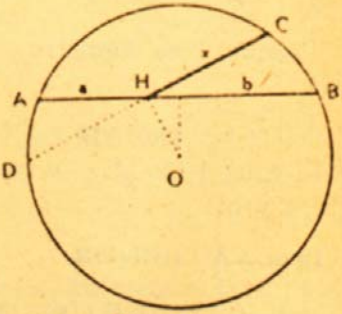


Fig. 249

4.a Solución.—(**Fig. 250**). 1º Sobre un eje horizontal se aplican las longitudes HB=a y HA=b.

2º Sobre AB=b—a como cuerda (o diámetro) se dibuja una ⊙.

3º Desde H se traza HC tang. a la ⊙.

HC es la M. p. g. entre a y b.

Dem.—Teor. LXVI, pág. 281.

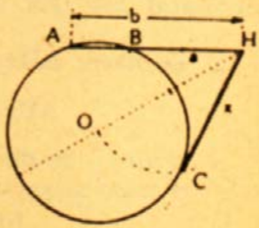


Fig. 250

b) Hallar la 3º p. g. entre dos trazos dados "**a**" *y* "**m**". *Siendo* **m** = *M p. g. y* **a**>**m**.

1ª Solución.—Se procede como para construir la 4ª p. g. (Ver Problema 10, pág. 225).

Se tiene la proporción: $\dfrac{a}{m} = \dfrac{m}{x}$.

AB=a; BC=m; AD=m; DE=x=3ª p. g. (Fig. 251).

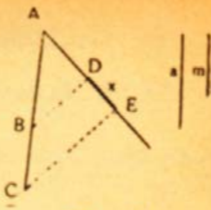


Fig. 251

2ª Solución.— Se construye un △ rect en el cual figure "m" como altura bajada del vért. del ∢R y "a" como una de sus proyecciones. La otra proyección será la 3ª p. g. pedida.

AD=a; AC⊥AD; DC=m; A(↔)C; CB⊥CA (Fig. 252).

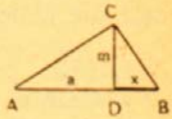


Fig. 252

3ª Solución.—Se construye △ rect. ABC haciendo: AB=a (hipotenusa).

⊙ de diámetro AB;

BC=m (corta en C desde B)

CD⊥AB

BD=x=3ª p. g. ¿Por qué (Fig. 253).

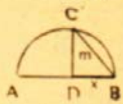


Fig. 253

4ª Solución.—Se dibuja una ⊙ arbitraria O.

Se construye la tangente AB=m.

Se describe: ⊙ (B, a) corta en C a la ⊙O. C(↔)B.

BD=x=3ª p. g. ¿Por qué (Fig. 254).

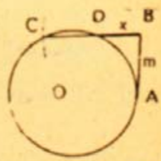


Fig. 254

5ª Solución.—Se traza AB=2m.

Se describe una ⊙ que pase por A y B.

Se describe una ⊙, con radio "a" y con centro en el punto medio C de AB. Corta en D.

D(↔)C.

CE=x=3ª p. g. (Fig. 255).

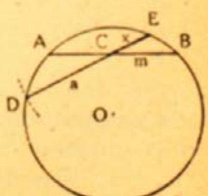


Fig. 255

NOTA.—Hallar la 3 p. g. entre "a" y "m" en el caso en que a<m, empleando las cinco soluciones anteriores.

c) *Construir dos trazos* "**a**" *y* "**b**" *conociendo la suma* "**s**" *de dichos trazos y su ½ p. g.* "**m**" $=\sqrt{ab}$. (Fig. 256).

Solución.— Se copia AB = s.

Describir semicircunferencia con diámetro AB.

En cualquier punto de AB se traza **m** perpendicular a AB.

MC || AB

y CH ⊥ AB

AH y HB son los trazos pedidos.

¡Discusión!

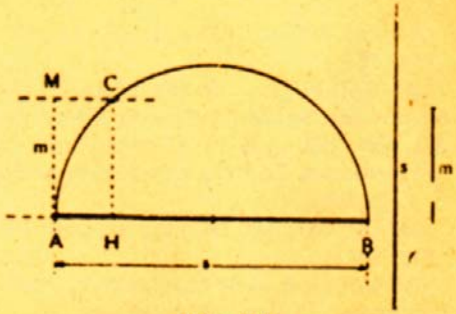


Fig. 256

d) *Construir dos trazos* "**a**" *y* "**b**" *conociendo su diferencia* "**d**" = **a**—**b** *y su ½ p. g.* "**m**" $=\sqrt{ab}$. (Fig. 257).

Solución.—Dibujar la ⊙ $(O, \frac{d}{2})$

En un punto N de la ⊙ trazar la tangente NC = m.

C(↔)O

CB y CA son los trazos pedidos.

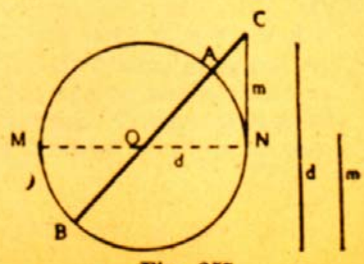


Fig. 257

EJERCICIOS DE APLICACION

* **185.** En un círculo de centro O y diámetro AB=27 cm se traza una cuerda AM=9 cm. Calcular su proyección sobre AB.

* **186.** Dos cuerdas se cortan en un círculo cuyo radio mide 17 cm. El producto de los dos segmentos de una de ellas es 145. Calcular la distancia entre el punto de intersección y el centro.

* **187.** En un círculo de radio r=5 cm, una cuerda está dividida en dos segmentos $AI=\frac{1}{4}r$ e $IB=\frac{4}{3}r$. ¿Cuál es la longitud de una cuerda CD que pasa por I y tal que IC : ID = 4 : 3?

188. Una cuerda CD encuentra un diámetro AB en el punto medio O del radio; los segmentos OC y OD son entre sí como 1 : 2.

Determinar estos dos segmentos en función del radio r de la circunferencia.

* **189.** Una cuerda de un círculo mide 50 mm y la sagita correspondiente a esta cuerda mide 15 mm. ¿Cuánto mide el radio?

190. En un círculo de 1,5 m de radio, una secante que pasa por el centro mide en total 15 m. ¿Cuánto vale la tangente que sale del mismo punto?

* **191.** El diámetro de un círculo mide 32 m y se prolonga en 4 m. Calcular la tg. trazada por el punto obtenido.

* **192.** En la prolongación del radio OA de un círculo O, hallar un punto P tal que la tangente PB=2 PA.

* **193.** A una circunferencia de radio **r** se traza una tangente AB=2r, y una secante BD=3r. Calcular la parte interior de la secante.

* **194.** A una circunferencia de diámetro BOD=40 cm se traza en B una tangente BA=30 cm y se traza DA que corta en C la circunferencia. Determinar AD, AC, BC y la proyección de DC sobre el diámetro BD.

* **195.** Dos círculos son tangentes exteriormente; la distancia de los centros es 36 cm y la tangente común exterior mide 28 cm. Calcular los radios de los círculos.

* **196.** Construir una cuarta proporcional entre tres longitudes dadas, considerando estas longitudes:

1º Como segmentos de dos cuerdas que se cortan.

2º Como secantes que salen de un mismo punto.

* **197.** Demuéstrese que en un △ ABC el producto de dos lados es igual al cuadrado de la bisectriz del ∢ comprendido entre ellos, más el producto de los segmentos que dicha bisectriz determinada sobre el tercer lado.

INDICACION: Construir la ⊙ circunscrita al △ ABC.

* **198.** En una ⊙ dada se traza un diámetro AB y en su extremo A se levanta la tangente AC. La secante CB corta la ⊙ en M. Demostrar las siguientes relaciones: 1º) $AB^2 = BM.BC$; 2º) $AM^2 = BM \cdot MC$. ¿Qué teoremas le recuerdan estas relaciones?

* **199.** En un △ ABC, $a = 14$; $b = 21$; $c = 15$ ¿cuánto mide b_α? Idem $a = 44$; $b = 22$; $c = 42$. ¿Cuánto mide b_γ?

* **200.** En un △ ABC dado, expresar en función de sus lados a, b, y c. 1º las bisectrices b_α, b_β, b_γ; 2º las transversales de gravedad.

* **201.** Construir una ⊙ O que sea tangente a una recta dada L y que pase por dos puntos dados P y Q.

* **202.** Idem que sea tangente a una ⊙ dada y que pase por dos puntos dadas P y Q.

203. En una ⊙ de radio r, probar que éste es M. p. g. entre los segmentos de una tangente determinados por su punto de tangencia y otras 2 tangentes ‖s que cortan las primera tangente.

204. Probar que en un cuadrilátero inscrito el producto de sus diagonales es igual a la suma de los productos de sus lados opuestos. (Teor. de Ptolomeo).

205. Calcular h_a en un △ ABC inscrito en una ⊙ de radio $r = 5$ cm, si $b = 12$ cm y $c = 16$ cm.

206. Dado un punto M fuera del círculo O, trazar una secante MCD tal que la circunferencia de diámetro CD sea tangente al diámetro ABM.

207. Dado un punto P dentro de un círculo (O, r) y dada una cuerda APB, demostrar que PA . PB se mantiene constante cuando la cuerda gira alrededor de P.

208. En un círculo O, el diámetro AB y la cuerda DE son perpendiculares.

Por A, se traza cualquier cuerda que corta a DE en F y la circunferencia en C.

Probar que AF . AC = Cte.

209. Dado un △ rectángulo ABC, describir: 1ª la ⊙ (A, c) y prolongar los catetos hasta su intersección con la ⊙; 2º la ⊙ (A, b). Demostrar mediante ambas figuras el teorema particular de Pitágoras.

CAPITULO XV

COMPARACION DE LAS AREAS DE DOS POLIGONOS SEMEJANTES

TEOREMA LXVII.—**Las áreas de dos △s de bases y alturas diferentes, son entre sí como los productos de sus bases por las alturas correspondientes.** (Fig. 258).

Tes.) $\dfrac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'} = \dfrac{c \cdot h_c}{c' \cdot h'_c}$

Dem.) $\triangle ABC = \dfrac{1}{2} c\, h_c$

$\triangle A'B'C' = \dfrac{1}{2} c'\, h'_c$

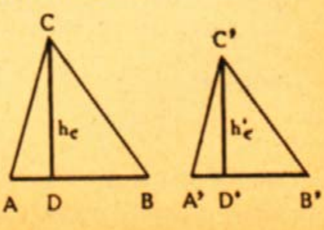


Fig. 258

$$\frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'} = \frac{\frac{1}{2}\, c\, h_c}{\frac{1}{2}\, c' h'_c}$$ (Se divide m. a m. y se simplifica por ½)

Luego, la tesis es verdadera.

TEOREMA LXVIII.—**Las áreas de dos triángulos de igual base son entre sí como las alturas correspondientes.** (Fig. 259).

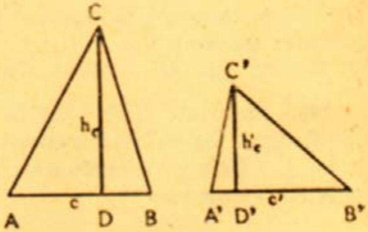


Fig. 259

Tes.) $$\frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'} = \frac{h_c}{h'_c}$$

Dem.) Sean c y c' las bases iguales y h_c y h'_c las alturas correspondientes.

$$\frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'} = \frac{c \cdot h_c}{c' \cdot h'_c}$$ (Teorema anterior)

$$\therefore \frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'} = \frac{h_c'}{h_c'}$$ (Se simplifica por c=c')

COROLARIO.—*Dos paralelógramos de igual base son entre sí como sus alturas correspondientes.*

Dem.) Un # es el doble de un △ de igual base y altura.

TEOREMA LXIX.—**Las áreas de dos triángulos de igual altura son entre sí como las bases correspondientes.** (Fig. 260).

Tes.) $\dfrac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'} = \dfrac{AB}{A'B'}$

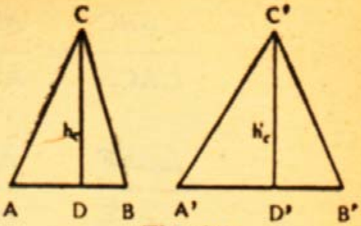


Fig. 260

Dem.) Sean AB y A'B' las bases y $h_c = h'_c$.

Se tiene:

$$\frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'} = \frac{AB \cdot h_c}{A'B' \cdot h'_c}$$

$$\therefore \quad \frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'} = \frac{AB}{A'B'} \quad \text{(Se simplifica por } h_c = h'_c\text{).}$$

COROLARIO.—*Dos #s de igual altura son entre sí como sus bases correspondientes.*

TEOREMA LXX.—**Las áreas de dos triángulos que tienen un ángulo igual son entre sí como los productos de los lados que forman este ángulo** (Fig. 261).

Hip.) $\alpha = \beta$

Tes.) $\dfrac{\triangle ABC}{\triangle AEF} = \dfrac{AB \cdot AC}{AE \cdot AF}$

Dem.) $E(\leftrightarrow)C$

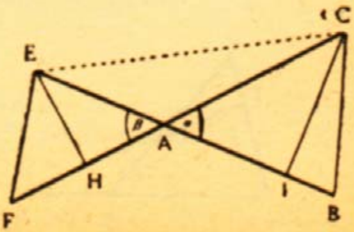


Fig. 261

$$\frac{\triangle ABC}{\triangle ACE} = \frac{AB}{AE} \quad (1)$$ (Los 2 $\triangle$s tienen misma altura CI)

$$\frac{\triangle AEF}{\triangle ACE} = \frac{AF}{AC} \quad (2)$$ (Misma altura EH)

$$\frac{\triangle ABC \cdot \triangle ACE}{\triangle ACE \cdot \triangle AEF} = \frac{AB \cdot AC}{AE \cdot AF}$$ (Se dividen m. a m. 1 y 2 y se simplifica 1ª razón por $\triangle$ACE)

$$\text{Luego: } \frac{\triangle ABC}{\triangle AEF} = \frac{AB \cdot AC}{AE \cdot AF} \qquad \text{(Q. E. D.)}$$

Nota.—Demuéstrese el teorema precedente con las figuras 262 y 263. En la 1ª de las figuras únase **F** con **B** y compárense los 2 $\triangle$s con el $\triangle$BFA que se forma.

En la 2ª de las figuras únase **B** con **E**.

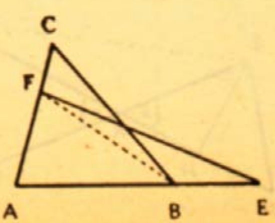


Fig. 262

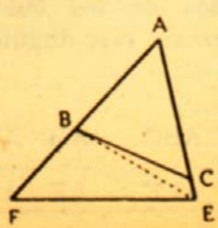


Fig. 263

ESCOLIO (1).—**Los dos $\triangle$s gozan de la misma propiedad si los ángulos considerados son suplementarios.**

En la figura 264, los $\triangle$s ABC y ADF, tienen suplementarios los ángulos en A.

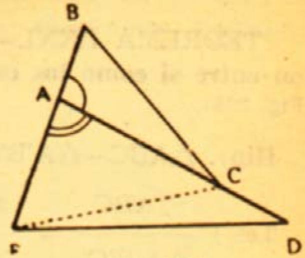


Fig. 264

Se tiene:

$$\frac{\triangle ABC}{\triangle AFC} = \frac{AB}{AF} \text{ (Misma alt.)}$$

$$\frac{\triangle AFC}{\triangle ADF} = \frac{AC}{AD} \quad \text{(Misma altura)}$$

$$\frac{\triangle ABC \cdot \triangle AFC}{\triangle AFC \cdot \triangle ADF} = \frac{AB \cdot AC}{AF \cdot AD} \text{ (Se simpl. por } \triangle AFC)$$

$$\therefore \quad \frac{\triangle ABC}{\triangle ADF} = \frac{AB \cdot AC}{AF \cdot AD}$$

COROLARIO 1º.—*Las áreas de dos #s que tienen un ángulo igual son entre sí como los productos de los lados que forman el ángulo.*

COROLARIO 2º.—*El área de un $\triangle$ es una función de dos de sus lados y del ángulo comprendido entre ellos.*

(1) **Escolio es una observación acerca de una proposición ya demostrada.**

COMPARACION DE LAS AREAS DE POLIGONOS SEMEJANTES

TEOREMA LXXI.—**Las áreas de dos △ semejantes son entre sí como los cuadrados de dos lados homólogos.** (Fig. 265).

Hip). $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$

Tes.) $$\frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'} = \frac{a^2}{a'^2}$$

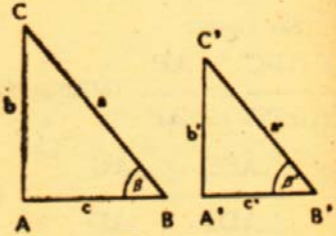


Fig. 265

Dem.) Siendo

$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ (Hip.)

se tiene: $\beta = \beta'$

$$\therefore \quad \frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'} = \frac{ac}{a'c'} \quad (1) \text{ (Teor. LXX)}$$

Pero: $$\frac{c}{c'} = \frac{a}{a'} \quad (\triangle\text{s semejantes})$$

Reemplazando en (1) $\frac{c}{c'}$ por su igual $\frac{a}{a'}$, resulta:

$$\frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'} = \frac{a^2}{a'^2}$$

(Q. E. D.)

COROLARIO.—*Las áreas de dos △s semejantes son entre sí como los cuadrados de dos líneas homólogas cualesquiera de dichos △s* (alturas, bisectrices, transversales de gravedad, etc.).

TEOREMA LXXII.—**Las áreas de dos polígonos semejantes cualesquiera, son entre sí como los cuadrados de dos lados homólogos o de dos diagonales homólogas. (Fig. 266).**

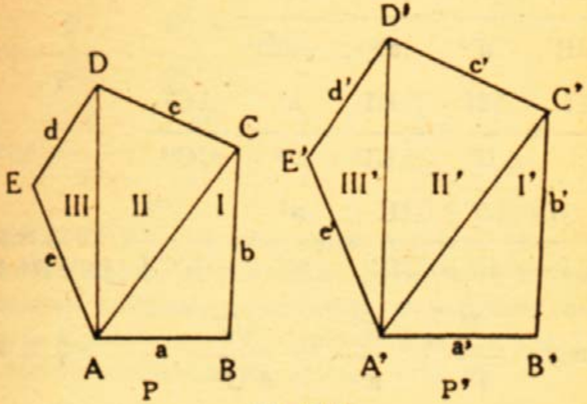


Fig. 266

Hip.) $P \sim P'$.

Tes.) $$\frac{P}{P'} = \frac{a^2}{a'^2} = \frac{b^2}{b'^2} \ldots = \frac{CA^2}{C'A'^2} = \frac{CE^2}{C'E'^2} = \ldots$$

Dem.) Se trazan las diagonales que parten de dos vértices homólogos A y A'.

Se tiene: $\triangle I \sim \triangle I'$; $\triangle II \sim \triangle II'$; $\triangle III \sim \triangle III'$;

$$\therefore \frac{\triangle I}{\triangle I'} = \frac{a^2}{a'^2} = \frac{b^2}{b'^2} = \frac{\overline{AC}^2}{\overline{A'C'}^2} \qquad \text{(Teor.LXIX)}$$

$$\frac{\triangle II}{\triangle II'}=\frac{c^2}{c'^2}=\frac{a^2}{a'^2}=\frac{\overline{AC}^2}{\overline{A'C'}^2}$$

$$\frac{\triangle III}{\triangle III'}=\frac{d^2}{d'^2}=\frac{a^2}{a'^2}=\frac{\overline{AC}^2}{\overline{A'C'}^2}$$

$$\therefore \frac{\triangle I}{\triangle I'}=\frac{\triangle II}{\triangle II'}=\frac{\triangle III}{\triangle III'}=\frac{a^2}{a'^2}=\frac{AC^2}{A'C'^2}$$

$$\therefore \frac{\triangle I+\triangle II+\triangle III}{\triangle I'+\triangle II'+\triangle III'}=\frac{a^2}{a'^2}=\frac{AC^2}{A'C'^2}$$ (Teor. sobre serie de prop.)

Luego: $$\frac{P}{P'}=\frac{a^2}{a'^2}=\frac{AC^2}{A'C'^2}$$ (Q. E. D.)

COROLARIO—*Las áreas de dos polígonos regulares de mismo número de lados, son entre sí como los cuadrados de los radios o de los apotemas.* (Fig. 267).

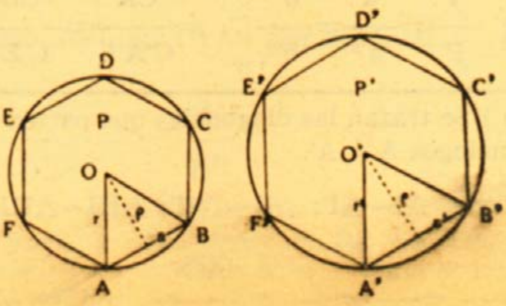


Fig. 267

Dem.) Se sabe que

$$\frac{a}{a} = \frac{r}{r'} = \frac{\rho}{\rho'} \quad \text{(Corol. 1º de Teor. LVIII).}$$

$$\text{Pero: } \frac{P}{P'} = \frac{a^2}{a'^2} \qquad \text{(Teor. LXXII)}$$

$$\text{Luego: } \frac{P}{P'} = \frac{a^2}{a'^2} = \frac{r^2}{r'^2} = \frac{\rho^2}{\rho'^2}$$

TEOREMA LXXIII.—**Si sobre los tres lados de un triángulo rectángulo, considerados como lados homólogos, se construyen polígonos semejantes, el polígono construído sobre la hipotenusa es equivalente a la suma de los polígonos construídos sobre los catetos.** (Fig. 268).

Hip). $A \sim B \sim C$
Tes.) $C = A + B$

Dem.) Comparando C con cada uno de los otros dos polígonos semejantes, se tiene:

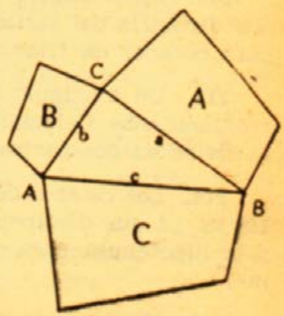


Fig. 268

$$\frac{A}{C} = \frac{a^2}{c^2} \qquad \text{(Teor. LXXI)}$$

$$\frac{B}{C} = \frac{b^2}{c^2} \qquad \text{(Teor. LXXI)}$$

$$\frac{A+B}{C} = \frac{a^2+b^2}{c^2} \qquad \text{(Sumando miembro a m.)}$$

$$\text{Pero: } \frac{a^2+b^2}{c^2} = 1 \quad (c^2=a^2+b^2 \text{ Teor. Pitág.})$$

$$\text{También: } \frac{A+B}{C} = 1$$

Luego: $C = A+B$

(Q. E. D.)

EJERCICIOS DE APLICACION

• **210.** Construir un cuadrado que guarde con otro la razón **m : n.**

• **211.** Construir un polígono semejante a un polígono dado de modo que la razón de sus áreas sea m : n.

212. Un triángulo tiene 48 m de base y 16 m de altura. ¿A qué distancia del vértice se ha de trazar una paralela a la base para obtener un triángulo de 54 m^2 de área?

213. Un triángulo tiene 20 m de base y 15 m su altura correspondiente. Calcular la longitud de la paralela a la base que lo divide en dos partes equivalentes y su distancia a la base.

214. Los catetos de un triángulo rectángulo miden 144 m y 108 m. ¿A qué distancia del vértice hay que trazar una paralela a la hipotenusa para que el área del trapecio obtenido sea 972 m^2?

215. Un trapecio cuyas bases miden 12 m y 7 m y la altura 6 m queda dividido en dos partes equivalentes por una paralela a la base. Calcular la longitud de esta paralela.

• **216.** En una circunferencia dada inscribir un rectángulo cuyos lados sean entre sí como m : n.

• **217.** En un triángulo ABC, trazar entre los lados AB y BC, una recta DE tal que AD=DE=EC.

• **218.** Transformar un triángulo ABC en un triángulo isósceles que tenga: 1º un ángulo común; 2º un lado común con el triángulo dado.

• **219.** Transformar un triángulo ABC en triángulo equilátero.

• **220.** Transformar un triángulo dado ABC en otro tal que tenga el ángulo α común con él, y el lado opuesto a este ángulo tenga una dirección dada.

• **221.** Transformar un triángulo dado ABC en otro semejante a un triángulo dado DEF.

• **222.** Dividir un triángulo ABC en partes que sean entre si como m : n : p : 1º por medio de transversales que salgan de un mismo vértice; 2º por medio de transversales que salgan de un punto dado en uno de los lados; 3º por medio de paralelas a un lado.

• **223.** Construir un triángulo semejante a otro dado ABC, de modo que su área sea 9 veces mayor que la del $\triangle$ dado ABC. Id, 16 veces mayor.

• **224.** Construir un polígono semejante a otro dado de modo que su área sea el cuádruplo del polígono dado.

• **225.** Construir un polígono cuya área sea equivalente a la suma de dos polígonos semejantes dados, y que además, sea semejante con estos últimos.

• **226.** Idem que sea equivalente a la diferencia de los dos polígonos semejantes dados y semejante a ellos.

227. Construir un $\triangle$ semejante a otro dado ABC y de modo que su área sea equivalente a los $\frac{2}{3}$ del $\triangle$ dado.

• **228.** Construir un cuadrado que esté con otro dado en la razón de m : n (m y n son trazos o números).

229. Dividir un cuadrado en tres partes equivalentes por dos cuadrados concéntricos.

230. Dividir un triángulo en tres partes equivalentes por rectas perpendiculares a uno de los lados.

• **231.** Dividir un triángulo dado en dos partes equivalentes por medio de una || a una recta dada.

• **232.** Transformar un cuadrado en un triángulo equilátero equivalente.

CAPITULO XVI

LONGITUD DE LA CIRCUNFERENCIA Y AREA DEL CIRCULO

§ 1.—LONGITUD DE LA CIRCUNFERENCIA

Experimentalmente se puede obtener la longitud de una circunferencia arrollando un hilo o cinta alrededor de la circunferencia o llanta de una rueda o disco, lo más perfectos posibles, que después se rectifica.

Pero este concepto carece de *precisión matemática.* Para obtener la longitud de la circunferencia por un procedimiento matemático, se asimila la ⊙ a una *línea poligonal regular* de lados muy pequeños. Así se consigue obtener una longitud tanto más aproximada cuanto mayor sea el número de lados de dicha línea poligonal regular.

La circunferencia es el *límite* a que tiende la línea poligonal regular inscrita. "En este caso particular *el límite hacia el cual tiende la longitud de la línea poligonal regular inscrita, es la longitud exacta de la ⊙*".

Ejemplo: Considerando las fracciones 2/3 y 3/2, si se añade sucesivamente la unidad a cada uno de los términos, la primera se hace 3/4, 4/5, 5/6. . . 9/10. . . 999/1000; y la segunda 4/3, 5/4, 6/5. . . 10/9. . . 1.000/999. Una y otra se acercan a la unidad: la primera le queda siempre inferior, y la segunda, siempre superior. Se dice que el **límite común** de las dos fracciones consideradas es la **unidad.**

Si se considera una circunferencia **C** y los polígonos regulares del mismo número de lados: **M**, inscrito y **N**, circunscrito en ella, la circunferencia está comprendida entre los perímetros **p** del primero y **P** del segundo. (Fig. 269).

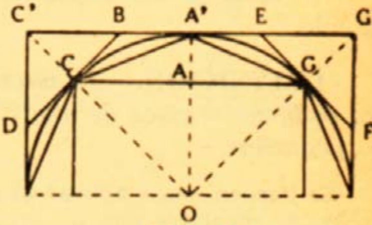


Fig. 269

O sea que: **p<C<P.** (Una línea poligonal convexa es menor que cualquier otra línea envolvente que une los mismos extremos).

Si se duplica el número de lados de los polígonos regulares M y N el perímetro p aumenta, mientras el perímetro P disminuye.

En efecto: CA'+A'G>CG

EF<EG'+G'F (Fig. 269).

Designando por p' y P' los nuevos perímetros, resulta: p'<C'<P'.

Repitiendo indefinidamente esta operación, los perímetros del polígono inscrito y circunscrito, se *acercan* más y más a la circunferencia C, y, en el *límite* se tendrá: límite p= límite P =C.

De lo expuesto anteriormente se puede enunciar:

"La longitud de una circunferencia es el límite común hacia el cual tienden los perímetros p y P de los polígonos regulares semejantes, inscritos y circunscritos, cuando se duplica indefinidamente el número de sus lados".

Al confundirse los perímetros de los dos polígonos con la circunferencia, dichos polígonos coinciden con el círculo.

De aquí se desprende la siguiente definición para el círculo.

DEFINICION.—*Un círculo se puede considerar como un polígono regular de una infinidad de lados infinitamente pequeños.*

Se pueden, pues, aplicar al círculo todos los teoremas sobre polígonos regulares que no exijan un determinado número de lados.

TEOREMA LXXIV.—**Todos los círculos son semejantes entre sí.**

Dem.)—Ver Teorema LVIII.—Sobre polígonos regulares.

TEOREMA LXXV.—**Dos circunferencias son entre sí como sus radios o como sus diámetros.**

1º Dem.) Sean C y C' las circunferencias y r y r' sus respectivos radios.

Se consideran C y C' como los perímetros de dos polígonos regulares de un mismo, pero infinito número de lados en que los radios y apotemas se confunden respectivamente con r y r'.

Aplicando la propiedad de los polígonos regulares que dice: **"que los perímetros de dos polígonos regulares de un mismo número de lados son entre sí como sus radios, resulta directamente:**

$$\frac{C}{C'} = \frac{r}{r'} \qquad \text{(Corol. 2º, pág. 286).}$$

Amplificando por 2, la 2ª razón, se tiene la razón entre los diámetros:

$$\frac{C}{C'} = \frac{2r}{2r'} = \frac{d}{d'} \qquad \text{(Q. E. D.)}$$

2.ª Demostración del Teorema LXXV.—(Fig. 270).

Sean:

C y C' dos circunferencias.

r y r' = radios.

p y p' = perímetros de los polígonos regulares del mismo número n de lados.

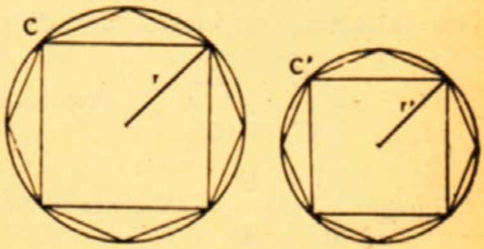


Fig. 270

Siendo los dos polígonos semejantes se tiene:

$$\frac{p}{p'} = \frac{r}{r'} \qquad \text{(Teor. LVIII, corol. 2º, pág. 286).}$$

Duplicando indefinidamente el número de los lados de los polígonos, p y p', tienen por *límites* respectivamente **C** y **C'**.

Pero para todos los valores de **p** y **p'** siempre resulta:

$$\frac{p}{p'} = \frac{r}{r'}$$

También en el *límite* que es la circunferencia, se tendrá:

$$\frac{C}{C'} = \frac{r}{r'} \qquad \text{(Q. E. D.)}$$

TEOREMA LXXVI.—**La razón entre una circunferencia y su diámetro es constante.**

Dem.) Sean **C** y **C'** dos circunferencias cualesquiera y sus diámetros respectivos **d** y **d'**, resulta:

$$\frac{C}{C'} = \frac{d}{d'} \qquad \text{(Teor. LXXV)}$$

Luego: $\frac{C}{d} = \frac{C'}{d'}$ (Alternando medios prop. precedente)

La razón constante entre una circunferencia y su diámetro se designa por la letra griega π.

Por tanto $\frac{C}{d} = \pi$

El número π es **inconmensurable** y tiene por valor aproximado: $\pi = 3{,}141592653\ldots$

En la práctica se adoptan los siguientes valores:

$$\pi = 3{,}1416 \text{ ó } \frac{22}{7} \text{ ó } \frac{355}{113}$$

COROLARIO.—*La longitud de una circunferencia es igual al producto de su diámetro por π o al producto del duplo del radio por π.*

Dem.) Se sabe que: $\frac{c}{d} = \pi$

Luego: $C = \pi d = \pi 2r = 2\pi r.$

Si el diámetro d=1, ¿cuál es el valor de la ⊙ C?

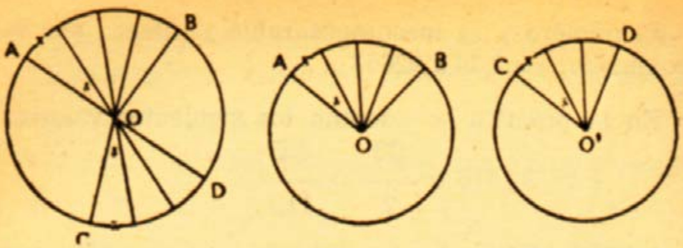
Inversamente, conociendo la longitud C de la circunferencia, se puede determinar r.

$$r = \frac{C}{2\pi} = \frac{C}{2} \cdot \frac{1}{\pi}$$

El valor recíproco aproximado de π es: $\frac{1}{\pi} = 0{,}3183.$

§ 2.—DETERMINACION DE UN ARCO DE ⊙ EN FUNCION DE SU ANGULO DEL CENTRO RESPECTIVO Y DEL RADIO

TEOREMA LXXVII.—**En una misma circunferencia o en circunferencias congruentes, dos arcos son entre sí como los ángulos del centro correspondientes.**



a b c

Fig. 271

Tes.) $\dfrac{\text{arc. AB}}{\text{arc. CD}} = \dfrac{\measuredangle AOB}{\measuredangle COB}$

Demostración.—1º Consideraremos el caso en que los arcos AB y CD tienen una medida común, es decir, son **conmensurables.** (Fig. 271 a, b, c).

Supóngase que una medida común **x** quepa 4 veces en el arco AB y 3 veces en el arco CD, resulta:

$$\left.\begin{array}{l}\text{arc. AB} = 4x \\ \text{arc. CD} = 3x\end{array}\right\} \text{Luego: } \frac{\text{arc. AB}}{\text{arc. CD}} = \frac{4x}{3x} = \frac{4}{3} \quad (^1)$$

Si se unen los puntos de división de los arcos con el centro O, los ángulos **AOB** y **COD** quedan divididos en 4 y 3 partes iguales. (A arcos iguales corresponden ángulos del centro iguales en una misma $\odot$ ó en $\triangle$s congruentes).

Supóngase que δ es la común medida de estos ángulos, se tiene:

$$\left.\begin{array}{l}\measuredangle AOB = 4\,\delta \\ \measuredangle COD = 3\,\delta\end{array}\right\} \text{Luego: } \frac{\measuredangle AOB}{\measuredangle COD} = \frac{4\,\delta}{3\,\delta} = \frac{4}{3} \quad (^2)$$

De las igualdades 1 y 2 resulta:

$$\frac{\text{arc. AB}}{\text{arc. CD}} = \frac{\sphericalangle \text{AOB}}{\sphericalangle \text{COD}}$$

2º En el caso en que los arcos AB y CD sean **inconmensurables**, procédase en forma análoga a la del Teor. **XLII**, 2º, pág. 236.

El teorema anterior permite resolver los 2 problemas siguientes.

PROBLEMA 19.—*Calcular la longitud de un arco* **p**, *conocidos el radio* **r** *de la circunferencia y el ángulo del centro correspondiente* α.

Solución.—Se considera la circunferencia como un arco completo cuyo ángulo del centro correspondiente mide 360° y se aplica teorema LXXVII.

$$\frac{2\pi \text{r}}{\text{arc. p}} = \frac{360^\circ}{\alpha}$$

$$\text{arc. p} = \frac{2\pi \text{r} \cdot \alpha}{360^\circ} = \frac{\pi \text{r}\, \alpha}{180^\circ} \qquad \text{(Simpl. por 2).}$$

PROBLEMA 20.—*Calcular el ángulo del centro* α, *en función de su arco correspondiente* **p** *y del radio* **r** *de la circunferencia.*

Solución.—Se aplica, también, el teorema LXXVII.

$$\frac{2\pi \text{r}}{\text{arc. p}} = \frac{360^\circ}{\alpha}$$

En este caso se despeja la incógnita α.

$$\alpha = \frac{\text{arc. p} \cdot 360^\circ}{2\,\pi\,r} = \frac{\text{arc. p} \cdot 180^\circ}{\pi\,r}$$

EJERCICIOS DE APLICACION

* **233.** ¿Cuál es la longitud de un arco de 72º en una circunferencia de 17,5 m de radio?

* **234.** Calcular el radio de una circunferencia en la cual un arco de 45º tiene 14,1372 m de longitud.

* **235.** Dos arcos de 22º y 35º pertenecen a la misma circunferencia. El primero mide 2,7 m. Calcular la longitud del segundo y el radio de la circunferencia.

* **236.** Calcular en grados y minutos un arco cuya longitud es igual a su radio.

237. Calcular la longitud de la circunferencia circunscrita a un cuadrado de 16 cm. de lado.

* **238.** En el diámetro AB de una circunferencia de centro O, se marca el punto C entre A y O, y el punto D entre O y B, y se describen las circunferencias de diámetros AC, CO, OD, DB. Mostrar que la suma de las longitudes de estas cuatro circunferencias es igual a la circunferencia mayor.

239. En un círculo O de radio r, se inscribe un hexágono regular y se circunscribe un cuadrado al círculo. Expresar, en función de r, el perímetro de estos polígonos. Deducir que el valor de π está comprendido entre 3 y 4.

240. De cada vértice de un cuadrado ABCD como centro, se describe, con radio igual al lado, un cuadrante de circunferencia limitado a los lados. Expresar, en función del lado a, el perímetro de cuadrilátero curvilíneo EFGH determinado por los arcos.

241. Dos circunferencias son tangentes interiormente en A y la menor pasa por el centro O de la mayor. Un radio OC de la mayor encuentra la menor en B. Mostrar que los arcos AB y AC tienen la misma longitud.

242. Dos ruedas cuyos diámetros respectivos miden 3,6 m y 0,9 m y cuya distancia de los centros es 2,7 m están unidas por una correa no cruzada. Calcular la longitud de esta correa.

243. Dos circunferencias tienen por radios respectivos 100 m y 25 m. La distancia de los centros es 150 m. Se trazan las dos tangentes comunes exteriores AB y CD. ¿Cuál es la longitud del circuito convexo formado por las dos circunferencias y sus tangentes?

§ 3.—AREA DE UN CIRCULO

TEOREMA LXXVIII.—**El área de un círculo es igual al semi producto de su circunferencia por su radio.**

Tes.) $S_c = \dfrac{C}{2} \cdot r.$

Dem.) Se considera el círculo como un polígono regular de una infinidad de lados, en el cual la circunferencia **C** es su perímetro y su radio **r** se confunde con la apotema.

Pero la fórmula para calcular el área de un polígono es: $\mathbf{S} = \mathbf{s} \cdot \rho$ (s=semi perímetro; ρ=apot.).

Aplicando esta fórmula al círculo resulta:

$$\boxed{S_c = \frac{C}{2} \quad r}$$

COROLARIOS—1° *El área de un círculo es igual al producto de π por el cuadrado del radio.*

Dem.) En la fórmula: $S_c = \frac{2}{C} \cdot r$, se reemplaza C por su valor $2\pi r$. Resulta:

$$\frac{2\pi r}{2} \cdot r = \pi r^2$$

Luego: $\boxed{S_c = \pi r^2}$

2° *Las áreas de dos círculos son entre sí como los cuadrados de sus radios o de sus diámetros.*

Dem.) Denotando por S_1 y S_2 las áreas de los círculos y por r y r' sus radios respectivos, se tiene:

$$S_1 = \pi r^2$$
$$S_2 = \pi r'^2$$

Luego:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\pi r^2}{\pi r'^2} = \frac{r^2}{r'^2} = \frac{4r^2}{4r'^2} = \frac{(2r)^2}{(2r')^2} = \frac{d^2}{d'^2}$$ (Se simplifica por π y se amplifica por 4).

También se puede aplicar el corolario del teorema LXXII, considerando los círculos como polígonos regulares de un mismo, pero infinito número de lados.

3° *Un círculo es equivalente a un triángulo cuya base es igual a la longitud de la circunferencia y cuya altura es igual al radio.*

§ 4.—*CALCULO DEL AREA DE UN SECTOR CIRCULAR*

Ver en la Pág. 12 la definición de sector circular.

TEOREMA LXXIX.—**El área de un sector circular es igual al semi producto de su arco por su radio.** (Fig. 272).

Se designa:

sector circ. OAG $= S_c$
arco ABCDG $= a$
Apotema OI $= \rho$
Radio AO $=$ OB $= r$

Tes.) $S = \dfrac{1}{2} a \cdot r$

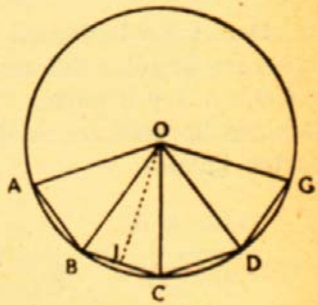


Fig. 272

Dem.) Sea el sector poligonal regular OABCDG $= S_{p \cdot r}$

$$S_{p \cdot r} = \frac{1}{2} AB \cdot \rho + \frac{1}{2} BC \cdot \rho + \frac{1}{2} CD \cdot \rho + \frac{1}{2} DG \cdot \rho$$

$$S_{p \cdot r} = \frac{1}{2} (AB + BC + CD + DG) \, \rho$$

El sector circular OA se puede considerar como un sector poligonal regular de una infinidad de lados cuyo perímetro es el arco **a** y cuyo apotema ρ se confunde con el radio **r**.

Luego resulta directamente:

$$\boxed{S_c = \frac{1}{2} a \, r}$$

COROLARIO.—*Un sector circular es equivalente a un triángulo que tiene por base el arco lineal y por altura el radio.*

TEOREMA LXXX.—**En un mismo círculo o en círculos congruentes, dos sectores circulares son entre sí como sus ángulos del centro, o sus arcos correspondientes.**

Dem.) En la figura 271 a, los mismos radios que dividen los ángulos del centro AOB y COD y los arcos AB y CD, en 4 y 3 partes iguales respectivamente, dividen también los sectores AOB y COD en el mismo número de partes iguales.

$$\frac{\text{sector AOB}}{\text{sector COD}} = \frac{4}{3} = \frac{\sphericalangle \text{AOB}}{\sphericalangle \text{COD}} = \frac{\text{arc. AB}}{\text{arc. CD}}$$

Denotando por $\mathbf{S_1}$ y $\mathbf{S_2}$, las áreas de los sectores, por $\mathbf{a_1}$ y $\mathbf{a_2}$ los arcos y por $\mathbf{r_1}$ y $\mathbf{r_2}$ los radios y por α_1 y α_2 los ángulos del centro, resulta:

$$S_1 = \frac{1}{2} a_1 r_1 \qquad \text{(Teorema LXXIX)}$$

$$S_2 = \frac{1}{2} a_2 r_2 \qquad \text{(Teorema LXXIX)}$$

Luego: $$\frac{S_1}{S_2} = \frac{a_1}{a_2} \qquad \text{(Dividiendo m. a m. y simplificando la razón)}$$

Pero: $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}$ (Teorema LXXVII)

Luego: $\dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}$ (Q. E. D.)

Este teorema permite, también, calcular el área de un sector circular: 1º en función del radio **r** y su arco; 2º en función del radio **r** y el ángulo del centro correspondiente.

También permite calcular el arco y el ángulo del centro, dándose el radio y el área del sector.

PROBLEMA 21.—*Calcular el área de un sector circular dados el ángulo del centro* $\alpha = 40°$ *y el radio* $r = 10$ *cm.*

Solución.— $\dfrac{360°}{40°} = \dfrac{100\pi}{x}$ (Teorema LXXX)

$$x = \frac{40 \cdot 100\,\pi}{360} = \frac{100\pi}{9}$$

PROBLEMA 22.—*Calcular el área de un sector circular dados el arco* a=50 (cm) *y el radio* r=10 (cm).

Solución.— $\dfrac{2\pi \cdot 10}{50} = \dfrac{\pi \cdot 100}{x}$

$$x = \frac{50 \cdot \pi \cdot 100}{2\,\pi \cdot 10} = 250 \text{ [cm}^2\text{]}$$

§ 5.—*AREA DE UN SEGMENTO CIRCULAR*

(Véase la definición de segmento circular en página 12).

El área de un segmento circular *es igual a la del sector correspondiente disminuída (o aumentada) del triángulo que tiene por base la cuerda del segmento y por vértice el centro del círculo.* (Fig. 273).

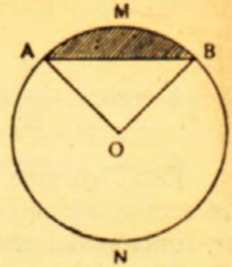


Fig. 273

Segmento ABM = sect. OAMB — $\triangle$ AOB
Segmento ANB = sect. OANB + $\triangle$ AOB

§ 6.—*AREA DE UNA CORONA CIRCULAR*

Corona circular es la superficie comprendida entre dos circunferencias concéntricas. (Fig. 274).

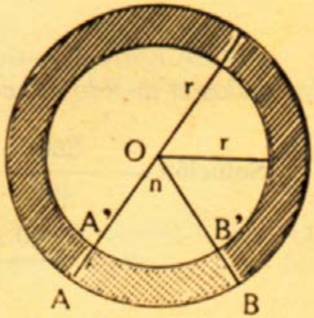


Fig. 274

El área de una corona circular *es igual a la diferencia de área de los dos círculos.*

$$S = \pi r^2 — \pi r'^2 = \pi (r^2 — \pi r'^2)$$

Un *sector de corona circular* de **n** grados es igual a los $\frac{n}{360}$ de la corona entera, lo que da:

$$S = \pi \ (r^2 — r'^2) \cdot \frac{n}{360}.$$

Ej.: el sector de corona ABB'A'.

EJERCICIOS DE APLICACION

• **244.** Calcular el área de un sector de 75º en un círculo de 30 cm de diámetro.

• **245.** Cálcular el área de la base de una columna circular de 1,20 m de circunferencia.

246. En un triángulo ABC de base AB=72 m, la altura y la transversal correspondientes miden respectivamente 45 y 60 m. Calcular la longitud de los lados CA y CB. ¿Cuál sería el radio del círculo equivalente al triángulo ABC?

• **247.** Calcular en función de r el área de los segmentos de 60º, 90º y 120º.

• **248.** Calcular el radio de un círculo sabiendo que el área del segmento correspondiente a un arco de 45º es a^2. (Aplicación: $a^2 = 1$ cm^2).

• **249.** Calcular el área de un círculo inscrito en un sector de 60º de radio **r**.

250. Demostrar que el área de una corona circular tiene por medida el producto de su anchura (r—r') por la semisuma ($\pi r+\pi r'$) de las dos circunferencias que la limitan.

251. Demostrar que el área de una corona circular es equivalente al área del círculo que tiene por diámetro la cuerda de la circunferencia exterior tangente a la circunferencia interior.

• **252.** El área de una corona circular es 120 m^2 y el diámetro menor mide 12 m. Calcular el radio del círculo mayor.

• **253.** Una corona circular de 1 m^2 de área tiene 0,5 m. de anchura. Calcular el área del círculo menor.

254. Dividir un círculo en dos partes: 1º equivalentes; 2º proporcionales a 2 y 3, por un segundo círculo concéntrico.

255. Dos circunferencias concéntricas dejan entre sí una corona circular de 25,328 m^2. Siendo la anchura de esta corona 2 m; calcular el radio de cada circunferencia.

* **256** Sobre un diámetro AOB y sobre los dos radios OA y OB, se describen, a un mismo lado de AB, tres semi circunferencias. El área comprendida entre las tres semi circunferencias es 2464 $cm.^2$ Calcular r.

257. Un arco AB mide 80 cm y las tangentes en A y B, forman un ángulo de 144°. Calcular el área del círculo entero y la del sector AOB.

* **258.** Calcular la longitud de las circunferencias inscrita, circunscrita y ex inscrita a un triángulo equilátero de lado $a=1$ m. y el área comprendida entre las dos primeras.

259. Un rombo que tiene un ángulo de 60° está circunscrito a un círculo de 10 cm. de radio. Calcular el área comprendida entre el rombo y la circunferencia.

260. En un círculo de diámetro AB se traza la tangente AD y una secante BCD=4 r. Calcular el área de los triángulos ABC y ADC y de la superficie mixtilínea AMCD.

261. El área comprendida entre el perímetro de un hexágono regular y la circunferencia circunscrita a este polígono es 13 cm^2. Calcular el radio de esta circunferencia. (Tomar $\pi=22/7$).

Fig. 275

* **262.** Siendo a el lado del cuadrado, buscar el área de la cruz de Malta, que se obtiene trazando arcos tangentes, de dos en dos, en el punto medio de las diagonales. (Fig. 275).

263. En un cuadrado de lado m, se describen, desde dos vértices opuestos y con radio m, arcos que por su intersección determinan una naveta; calcúlese el área de ésta. (Fig. 276).

Fig. 276

* **264.** Sobre los tres lados de un triángulo rectángulo se describen semicircunferencias de modo que el vértice del ángulo recto sea punto común de los tres arcos. Calcular el área comprendida entre los arcos secantes y compararla con la del triángulo. (Fig. 277).

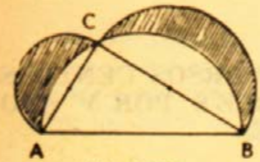


Fig. 277

265. En los extremos A y B de un trazo AB se aplican segmentos iguales AC=BD y se describen semi circunferencias sobre AB, AC, DB hacia un lado y sobre CD hacia el otro. Mostrar que el área limitada por las cuatro semi circunferencias es equivalente al círculo cuyo diámetro es igual a la suma de los radios de las dos circunferencias concéntricas. (Fig. 278).

Fig. 278

* **266.** El diámetro AB de un círculo se divide en tres segmentos AC=a, CD =b y DB=c y se describen semi circunferencias sobre AC y AD hacia un lado y sobre CB y DB hacia el otro lado. Mostrar que el círculo dado queda dividido en partes proporcionales a a, b, c. (Fig. 279).

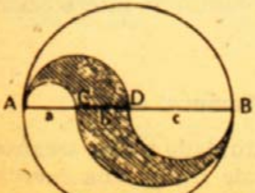


Fig. 279

267. Dividir un círculo en tres partes equivalentes, por medio de curvas en forma de S, compuestas de dos semi circunferencias.

268. Dividir un círculo en tres partes equivalentes por dos circunferencias concéntricas.

269. Dividir una corona en dos partes equivalentes por una circunferencia concéntrica.

PROBLEMAS PROPUESTOS EN DIVERSOS CENTROS DE BACHILLERATO SOLUCIONABLES POR 5º AÑO DE HUMANIDADES

1. En un cuadrilátero cualquiera ABCD, determinar M sobre CD de modo que $\sphericalangle AMD = \sphericalangle BMC$.

2. En un cuadrado ABCD se traza una recta desde A que corta el lado BC en M y la prolongación de DC en I.

Demuestre que:

$$\frac{1}{\overline{AM}^2} + \frac{1}{\overline{AI}^2} = \frac{1}{\overline{AB}^2}$$

(Temuco, 1956)

3. En un cuadrilátero ABCD en donde AB=AD y BC=CD se prolongan sus lados opuestos hasta sus puntos de intersección M y N.

Demuestre que MN $\parallel$ BD.

(Temuco, 1956)

4. Dada una circunferencia de diámetro dado y una secante que forma con él un ángulo oblicuo, se pide trazar una cuerda paralela a la secante y que quede dividida por el diámetro en la razón de 3 : 1.

5. Construir un $\triangle$ dados: $a+b+c=s$, y $\rho : c=m : n$.
Talca, 1954)

6. Si AA', BB', CC' y DD' son las distancias de los vértices de un cuadrado ABCD a una recta cualquiera, demuestre que:
$\overline{AA'}^2+\overline{CC'}^2-2\overline{BB'} \cdot \overline{DD'}=\overline{AB}^2$

7. Se pide inscribir un rombo EFGH en un triángulo cualquiera ABC; con el lado EF en el lado AB del triángulo y siendo E un punto dado en el lado AB.

(Talca, 1954)

8. Los lados de un triángulo miden $a=6$ dm 3 cm ; $b=0{,}84$ m; $c=1$ m 5 cm. Calcule el valor de cada uno de los seis segmentos determinados por las bisectrices de los ángulos interiores sobre los lados opuestos.

(Temuco, 1954)

9. Determine en la altura CD de un triángulo isósceles de base AB, un punto P tal que

$$CP=AP+PB.$$

(Santiago, 1955)

10. Construir un triángulo dados:

$$b : h_a = m : n,\ b : h_c = m' : n',\ t_c$$

(Santiago, 1955)

11. Construir un triángulo dados: la razón en que la bisectriz de α divide el lado BC, la razón en que la bisectriz de β divide al lado AC y h_c.

(Santiago, 1955)

12. ¿Es verdad que las bisectrices de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo dividen a los lados, respectivamente opuestos, en la misma razón en que dividen a la altura?

Explique las distintas situaciones.

(Santiago, 1955)

13. En un triángulo rectángulo CD es bisectriz; DM y DN son perpendiculares a BC y AC; CN=d. Demostrar que:

a) $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=2(a+b+c)^2-6(ab+bc+ac)$.

b) Calcular CD=m, en función de a y b.

(Valparaíso, 1955)

14. Dados tres puntos A, B, C y un trazo k.

Encontrar P sobre AC y Q sobre BC, de modo que

$$CA \cdot CP = CB \cdot CQ = k^2$$

(Valparaíso, 1955)

15. El área de un triángulo equilátero se ha medido en unidades de superficie que son triángulos equiláteros de a=1 [cm] y el área de un cuadrado, con unidades que son cuadrados de lado a=1 [cm].

Resultan, los valores 17 y 22. ¿Qué valores resultarán si se intercambian las unidades?

16. Construir un # dados: $a, e : f = m : n, \varepsilon$

17. Construir un triángulo rectángulo, dados:

$$c,\ 3a+b=s$$

18. Construir un △ rectángulo dados en una recta los pies H, D y M de la altura, de la bisectriz y de la transversal de gravedad que parten del vértice del ángulo recto.

19. En un triángulo dado, inscribir un triángulo equilátero. ¿Está determinado dicho problema? Si no es así ¿qué condición agregaría usted para determinarlo?

20. Trazar por el vértice A de un triángulo, una recta tal que las distancias de A a las proyecciones de B y C en esta recta, estén en una razón dada m : n.

21. Construir un rombo, dados: $h, a : f = m : n$.

22. Las bases de un trapecio miden 12 m y 5 m. ¿Qué longitud tiene el segmento de una paralela a las bases, limitado por los lados no paralelos, si dicho segmento queda dimidiado por el punto de intersección de las diagonales?

23. Construir un cuadrilátero, dados: un ángulo, una diagonal y sabiendo que: $a : b : c : d = 5 : 6 : 3 : 4$.

24. Demostrar que si el centro de gravedad de un triángulo se une con los vértices, el triángulo queda dividido en tres partes equivalentes.

Trate de establecer si éste es el único, o si hay otros puntos en el interior del triángulo, que gozan de la misma propiedad.

25. Dadas dos circunferencias y un punto P, se pide trazar por P un segmento rectilíneo AB, cuyo extremo A esté en una de las dos circunferencias, el extremo B en la otra, y de modo que resulte dividido por P en la razón $2 : 3$.

Discusión.

26. En el triángulo ABC se ha trazado $CD = t_c$, y en ésta un punto M tal que $CM = \dfrac{1}{3}\,CD$.

Se une B con M y se prolonga BM hasta su intersección E con el lado AC. ¿En qué razón queda dividido BE por el punto M.

27. Demuéstrese que dos circunferencias tienen dos centros de homotecia. ¡Discuta!

(Talca, 1950).

28. Dada una cuerda en una circunferencia dada, trazar otra cuerda paralela, de modo que ambas cuerdas sean entre sí como $m : n$.

(Santiago, 1952).

29. Inscribir un trapecio isósceles en una circunferencia, dada la razón entre una base y el lado, y un ángulo.

(Santiago, 1952).

30. Inscribir, en un triángulo dado, un triángulo semejante a otro dado, y de modo que $c \parallel c'$.

31. Demostrar que las distancias de un punto de una transversal de gravedad de un triángulo a los lados no dimidiados por ella, son inversamente proporcionales a esos lados

32. Construir un triángulo, dados c, h_c, $t_a : t_b = 5 : 6$.

33. Encontrar un punto en el interior de un triángulo, de modo que los pies de las perpendiculares trazadas desde él a los tres lados, sean los vértices de un triángulo equilátero.

34. Inscriba en un triángulo dado, otro que sea semejante a un segundo triángulo dado y de modo que un lado del triángulo pedido sea perpendicular a uno de los lados del triángulo primitivo.

¿Cuántas soluciones tiene el problema?

35. En un triángulo rectángulo isósceles ABC, CD es la altura y $DE \perp BC$. Demostrar que $\overline{CD}^2 = \overline{AC} \cdot \overline{DE}$

¿Se cumple esta relación en cualquier $\triangle$ rectángulo?

36. En el $\triangle$ ABC, rectángulo en C, se trazan $CD \perp AB$.
Sean O, O_1 y O_2 centros de las circunferencias inscritas a los triángulos ABC, ADC y BDC.

Demostrar que $\triangle AOO_1 \sim \triangle ABO \sim \triangle CBO_2 \sim O_2O_1O$.

37. Por los dos extremos de un diámetro se trazan tangentes AF y BH, y por un punto **I** de la circunferencia, se traza la tangente que corta AF en C, y BH en D.
Demostrar que el $\triangle COD$ es rect. y que $CI \cdot ID = \text{constante}$

38. Demostrar que la siguiente relación se cumple en un $\triangle$ rectángulo: $h_c^{-2} = a^{-2} + b^{-2}$

Santiago, 1946.

39. En el hexágono ABCDEF, la diagonal AC mide 15 cm.
Calcular el área del hexágono.

40. Construir un triángulo, dados:

$$t_a : t_b = m : n,\ c,\ \sphericalangle t_a\, t_c).$$

41. Por el punto de intersección E de las diagonales de un trapecio, se traza la paralela a las bases.

Denótese por x la parte de esta paralela comprendida entre los lados del trapecio.

Demuéstrese que $x = \dfrac{2ac}{a+c}$

(Valparaíso, 1953)

42. Dado un triángulo ABC se pide trazar por C una transversal de modo que uno de los triángulos parciales resultantes sea semejante al $\triangle$ ABC.

Discutir y generalizar.

43. En el $\triangle$ ABC trazar la línea poligonal APQRS de modo que P esté en AB, Q en AC, R sea un punto dado, S esté en BC y que se verifique:

$$PQ : QR : RS = m : n : o, \text{ y}$$
$$AQ : QR = p : q.$$

44. Dado un ángulo CAB y un punto P, determine un punto X en el lado AC de modo que PX : XY = m : n.

Teniendo en cuenta que XY es $\perp$ a AB y que en **m** y **n** son trazos dados.

Emplee homotecia. ¡Discuta!

45. Buscar el L. G. de los puntos que dividen a las distancias de un punto dado a los puntos de una circunferencia dada, en la razón de m : n.

46. En un $\triangle$ inscrito a una $\odot$, la bisectriz de uno de sus ángulos interiores corta a la circunferencia en un punto D. Demuestre que la posición del punto D no depende de la situación del vértice opuesto en la circunferencia.

47. En una $\odot$ se da un punto P y una cuerda AB. Trazar la cuerda HPE que corte a AB en D, de modo que:

HD : PB = m : n.

48. Demostrar que si en un trapecio se traza una paralela a las bases de modo que sea 1/2 p. g. entre éstas, las diagonales de los nuevos trapecios que se forman, son paralelas entre sí.

49. Demostrar que si en un rectángulo se bajan las perpendiculares de los vértices a las diagonales que no parten de ellos, los pies de dichas perpendiculares son los vértices de un nuevo rectángulo semejante al dado.

50.—Se pide construir un $\triangle$, dados: un lado, (en posición y magnitud) y dos puntos de la bisectriz del ángulo opuesto.

51. La base de un $\triangle$ queda fija, mientras que el vértice se mueve sobre una circunferencia de modo que el ángulo opuesto a la base permanezca constante.

¿Cuál es el L. G. de su centro de gravedad?

52. AB y CD son dos cuerdas de una circunferencia que se cortan en el punto P.

Demostrar que si se hace PB'=PB en la prolongación CP más allá de P y PD'=PD en la prolongación AP más allá de P. se tiene B'D' $\parallel$AC.

53. El lado AB de un triángulo es fijo y su área p^2 es constante. ¿Cuál es el L. G. del centro de gravedad?

54. En una $\odot$ dada dibuje un diámetro AB. En un punto D de AB levante DE $\perp$AB. Por A trace una cuerda cualquiera AM que corte a DE en el punto N. Demuestre que AD. AB = AN. AM. ¿Puede estar D en alguna prolongación de AB?

Justifique su opinión.

55. En el $\triangle$ ABC trace MN $\parallel$ AB, y las rectas que unen A con N y B con M que se cortan en S. Demuestre que en el trazo PSQ paralelo a AB y limitado por AC y BC, se verifica que SP =SQ.

56. En un triángulo isósceles trace las alturas y busque y mencione todos los triángulos congruentes o semejantes que se forman y diga cuál magnitud tiene el valor $\dfrac{c^2}{2a}$

(Talca, 1953).

57. Hay dos ⊙s tangentes exteriormente de radios R y r Demostrar que la tangente común exterior es igual a $2\sqrt{Rr}$.

58. Demostrar que en un triángulo rectángulo se tiene: $(a+b-c)^2=2(c-a)\ (c-b)$. Explique en qué teorema funda su conclusión.

59. Construir un triángulo dados: $a : b = m : n$, c, t_a.

60. Dado un triángulo ABC, trazar una recta DE que corte los lados AC y BC, de modo que AD=DE=EB.

Santiago, 1957.

61. La mediana de un trapecio mide 19 cm y el trazo que une los puntos medios de sus diagonales 7 cm.

¿Cuánto miden las bases?

62. Demostrar que si se une el vértice de un triángulo isósceles con un punto H cualquiera de la base, se verifica:

$$\overline{AC}^2=\overline{CH}^2+\overline{AH}\ .\ \overline{HB}.$$

63. Dadas dos rectas no paralelas, en un plano, y un punto P entre ellas. Trazar la recta que pasa por el vértice y por el punto P, sin prolongar las dos rectas dadas.

64. Resuelva la ecuación.

$$\sqrt{A+\sqrt{x}}+\sqrt{A-\sqrt{x}}=B$$

Valparaíso, 1957

65. En un trapecio isósceles ABCD, la base mayor es el duplo del lado no paralelo y uno de los ángulos basales inferiores vale 60º. Determine el valor de BD : AB = CD : AC.

Talca, 1957.

66. En un triángulo rectángulo, el ángulo β es igual a 60º. Calcule los catetos, sus proyecciones sobre la hipotenusa y la altura, en función de c.

67. Se pide inscribir un cuadrado en otro, de modo que sus áreas estén en una razón dada: k. Discuta.

68. ¿Está determinado el problema que pide construir un trapecio, dados: $a : b : c = m : n : o$ y la altura ¿Qué dato elegiría para determinarlo?

En seguida haga la construcción.

Talca, 1950.

69. Demuestre que en un triángulo rectángulo, $t_a^2 + t_b^2 = 5t_c^2$.

70. Sea una semi ⊙ de diámetro AB. Si AD y BC son dos cuerdas cualesquiera que se cortan en P, demuestre que: $AB^2 = AD \cdot AP + BC \cdot BP$.

Indicación: Baje desde P la ⊥ al diámetro AB.

71. En un △ ABC trazar una paralela MN de modo que $CM - CN = d$.

Santiago, 1952.

72. Construya un triángulo, dados: $h_c : b_\gamma = m : n$, β, q.

Talca, 1956.

73. En un triángulo ABC se da la altura h_c correspondiente al lado c, y los segmentos **u** y **v** determinados sobre ese lado por la bisectriz b_γ. Constrúyalo.

Talca, 1956.

74. Demuestre que en todo △ rectángulo, $c^2 = s^2 - 4r\rho - \rho^2$.

Santiago, 1955.

75. Construir un △ dados: $a : b : c = 1 : 2^{\frac{1}{2}} : 3^{\frac{1}{2}}$ y $h_a + h_b - h_c = 4$ cm.

76. En el triángulo ABC se traza la bisectriz AD del ángulo α y la simetral de AD que corta a la bisectriz del ángulo exterior adyacente a γ, en E.

Demostrar que el cuadrilátero ADCE es inscriptible.

77. En un triángulo se verifica: $a^2 + b^2 + c^2 = 8r^2$. Se pide demostrar que dicho triángulo es rectángulo.

78. Construir un triángulo, dados: h_a, h_b, h_c.

Santiago, 1951.

79. Construir un triángulo, dados el vértice A, el pie de la altura, el pie de la transversal y el pie de la bisectriz correspondiente al lado **c**.

Talca, 1954.

80. Demostrar que en todo triángulo: $p^2 - q^2 = a^2 - b^2$.
Aplique esto al problema de construir un triángulo, dados:

$$c,\ a^2 - b^2,\ h_c.$$

Valparaíso, 1952.

81. Dos lados de un triángulo inscrito en una circunferencia son, respectivamente, el radio y el lado del triángulo equilátero inscrito. Calcule el área del triángulo en función del radio **r** de la circunferencia.

Temuco, 1956.

82. Determine el radio de la circunferencia inscrita en un triángulo rectángulo, de catetos **a** y **b**, en función de ellos.

Temuco, 1954.

83. Inscribir un cuadrado en un rombo.
¿Podría ex inscribir otro?

84. Construya una circunferencia que pase por dos puntos dados y que intercepte en una recta dada un segmento de longitud dada. Discuta.

Talca, 1953.

85. Se pide construir un rombo, dados: el perímetro y sabiendo que $e : f = 5 : 4$.

86. Dados 4 puntos, se pide determinar un rectángulo de modo que cada uno de sus lados pase por uno de dichos puntos, dándose, además, la razón m : n en que uno de esos puntos divide al lado que pasa por él.

Talca, 1955.

87. Un sector circular tiene α° y radio **r**. Otro sector circular tiene $2\alpha^\circ$ y $2r$. ¿Cómo son las superficies entre sí?

88. Inscribir en una circunferencia dada un cuadrilátero conociendo dos lados y la razón de los otros dos.

89. Determinar el centro de una circunferencia que sea tangente a dos rectas dadas L_1 y L_2 y a una circunferencia dada. Discusión.

Valdivia, 1951.

90. Los rectángulos que tienen por lados los segmentos determinados por el ortocentro en cada altura de un triángulo, son equivalentes. Demuéstrelo para el triángulo obtusángulo y para el triángulo acutángulo. ¿Se verifica para el triángulo rectángulo?

Punta Arenas, 1952.

91. Determinar los límites entre los cuales puede variar n para que la siguiente ecuación tenga raíces reales.

$$2ax(ax+nc)+(n^2-2)c^2=O.$$

92. Calcule el valor numérico de:

$$\left(a-\frac{b}{c}\right) : \left(\frac{d}{4}+\sqrt{e}\right)$$

si $a=12{,}4$ $\qquad b=4\frac{1}{2}$

$c=b^{\frac{1}{2}}$ $\qquad d=a.$ $\qquad e=c^4$ $\qquad$ Temuco, 1954.

93. Resuelva:

$$\frac{2}{z+(2-z^2)^{\frac{1}{2}}}+\frac{2}{z-(2-z^2)^{\frac{1}{2}}}=z$$

Temuco, 1954.

94. Resuelva:

$$\left[\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-1}+\frac{a-b}{x-1}\right]^{-1}=\frac{1-x}{x-a+b}+2$$

Santiago, 1955.

95. Simplifique: $\dfrac{1-a^2}{(1-x)^2-(a+x)^2}$

96. Divida $(x-y)$ por $\sqrt[6]{x}+\sqrt[6]{y}$ utilice el resultado para hacer racional el denominador de la fracción.

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}.$$

Talca, 1956.

97. Resuelva:

$$\frac{a}{b}\sqrt{\frac{c^2-x}{d^2-x}}=\frac{c}{d}\sqrt{\frac{a^2-x}{b^2-x}}$$

98. El medio aritmético y el medio geométrico de dos números que se diferencian en 32 unidades, están en la razón de $\frac{5}{3}$

Halle los números. Temuco, 1956.

99. Determine la raíz cuadrada de:

$$9^n-2\cdot 6^n+4^n$$

¿Cuál es el valor de dicha raíz si $n=5$?

100. Calcular la raíz cuadrada de:

$$x^{-4}-4x^{-3}+8x^{-1}+4$$

101. Reduzca a su forma más simple:

$$\frac{2m}{a}\cdot\sqrt[\sqrt{2}]{a^{\frac{m}{\sqrt{8}}}\cdot b^{\frac{m}{\sqrt{50}}}\cdot c^{\frac{r}{\sqrt{2}}}}:a^{\frac{m}{5}}\cdot b^{-2n}\cdot c^{\frac{r}{2}}$$

102. Resolver:

$$x^2-6x+9=4\sqrt{x^2-6x+6}$$

103. Determinar a, b, c, d, sabiendo que se tiene:

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{c};\ \frac{b}{c}=\frac{c}{d}$$

$a+b+c=15$ y $b+c+d=5$.

104. Si a y β son las raíces de

$$x^2+px+q=o,$$

formar la ecuación cuyas raíces sean:

$$\alpha + \frac{2}{\beta} \text{ y } \beta + \frac{2}{\alpha}$$

105. Resolver:

$$3^{\frac{x}{2}} + 3^{-\frac{x}{2}} = 2$$

106. Racionalizar y reducir:

$$\frac{1}{2} t \left(2at-t^2\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2\left(a-t\right) - \sqrt{2at-t^2}$$

Punta Arenas, 1952.

107. Calcular las 3 raíces de la ecuación

$$(x-1)^3 = (3-x)^3$$

Punta Arenas, 1952

108. Resolver $x^3+27=0$. Y verifique si las 3 raíces satisfacen la ecuación.

Valparaíso, 1952.

109. Obtener el valor más simple de:

$$\sqrt[n]{\frac{5^{n+2}-5^n}{24}}$$

110. Dada la igualdad:

$$\frac{a^2b\sqrt{ac}}{a^{\frac{1}{2}} \cdot b^{-\frac{2}{3}}} = \sqrt{\frac{ab^2}{c}}$$

expresar cada una de las cantidades **a**, **b**, **c**, en función de **las** otras dos.

Talca 1955.

111. Si $x = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2c}$

y $a+b+c=2s$ demostrar que:

$$b^2-x^2=\frac{4}{c^2}s(s-a)\ (s-b)\ (s-c)$$

Talca 1950.

112. Calcular aproximadamente el valor de $a^{-c} \cdot b^{-c}$ si
$a=0{,}65$
$b=\ 2$
$c=0{,}25$
Aprovechando este resultado, calcular $(16a)^{-c} \cdot b^{-c}$

Santiago, 1952.

113. Resolver:

$$2^x \cdot 5^{x+1} = 0{,}5 \cdot 10^{-8}$$

114. Inscribir en un triángulo, un rectángulo cuyos lados sean entre sí como m : n.

115. Construir un triángulo rectángulo, dados: $b+h_c$, $a+c$.

116. Dada la ecuación $mx^2-2mx+m=2x-2$ se pregunta:
a) ¿Cuánto debe valer m para que las raíces de la ecuación sean dos números enteros consecutivos? ¿Cuáles son dichas soluciones?

b) ¿Qué sucede con la diferencia de las raíces si m es un número grande y sigue creciendo?

Talca, 1955.

117. Si a y b son las raíces de $x^2+px+1=0$, y c, d, las raíces de $x^2+qx+1=$ o verifique que se cumple la relación:

$$(a-c)\ (b-c)\ (a+d)\ (b+d) = q^2-p^2.$$

118. ¿Qué valor toma la expresión?

$$N = \frac{\dfrac{1}{x}-b}{\dfrac{1}{x}+b}\sqrt{\frac{1+ax}{1-ax}} \qquad \text{si } x=\sqrt{\frac{2}{ab}-\frac{1}{b^2}}$$

119. Exprese en forma más sencilla:

$$\sqrt[5]{\sqrt{1024}}-\sqrt{3+\sqrt{5}-13}\;\sqrt{\sqrt{8\frac{1}{4}}+7\sqrt{\frac{2}{5}}}$$

120. Resolver: $\quad 2^{2x+3}-57=65\ (2^x-1)$

121. Resuelva:

$$\frac{1}{(1+b+b^2)^{1/2}+\sqrt{1-b+b^2}}=\frac{1}{4}$$

122. Reducir a la fórmula más sencilla:

$$\left[\frac{3(-1\pm i\sqrt{3})}{5}\right]^3$$

123. Simplificar la fracción e indicar si es independiente de x o de y.

$$\frac{\sqrt{48y^3}-\sqrt{75y^3}+\sqrt{12x^2y}}{2x-y}$$

124. Demuestre que en $ax^2+bx+c=o$, si $a=c$, una de las raíces es el valor recíproco de la otra. En tal caso, ¿cuál es el valor $x'^2+x''^2$ expresado en función de la razón k entre a y b?

125. Resolver:

$$(y^2-7by+10b^2)^{\frac{1}{3}}-(y^2+by-5b^2)^{\frac{1}{3}}=y-2b$$

126. Calcular el valor de $A=\dfrac{(2x'-5)\ (2x''-5)}{x'^2+3x'x''+x''^2}$ siendo x' y x'' las raíces de $x^2-15x+11=0$.

127. Determine las constantes a y b de la ecuación $3x^2-2ax+b=0$ de modo que la suma de sus raíces sea igual a 3 y su diferencia igual a uno.

128. Resolver:

$$\sqrt{x^2-3x-6} + \sqrt{x^2-3x+15} = 7.$$

129. En $x^3-1=0$, $x'=\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ ¿cuánto valen x'' y x'''?

130. Demuestre que 4^{-1} es el valor de la siguiente expresión:

$$\frac{2^{x+1}}{(2^x)^{x-1}} : \frac{4^{x+1}}{(2^x)^{x-1}}$$

131. Formar la ecuación de segundo grado cuyas raíces x' y x'' satisfagan a:

$$x'x''+x'+x''-a=0$$
$$x'x''-a\ (x'+x'')+1=0$$

132. Demostrar la identidad:

$$(1+\sqrt{3})^3(5-3\sqrt{3})=[(1+\sqrt{3})+(3+3\sqrt{3})(5-3\sqrt{3})] \cdot \frac{-2(7\sqrt{3}+11)}{13}$$

133. Resolver: $x^{1/2} + x^{-1/2} = -\dfrac{13}{6}$

$$\text{y} \quad x^{1/2} + \frac{1}{x^{1/2}} = \frac{13}{6}$$

134. Dadas las ecuaciones:

$$z^2 = 7z - 12$$
$$z^2 = 3z - p$$

determine "p" de modo que ambas ecuaciones tengan una raíz común.

Temuco, 1954.

135. Determine m de manera que la suma de los cuadrados de las raíces de la ecuación $x^2+(m-2)\ x-(m+3)=0$ sea igual a 25.

Santiago, 1955.

136. Encontrar la ecuación de segundo grado, cuyas raíces excedan en 5 unidades a las de la ecuación: $x^2-6x+a=0$.
¡Discusión!

137. Se pide resolver:

$$\frac{x^3+a^3}{x+a}=a^2$$

138. Obtenga la ecuación de segundo grado cuyas raíces son:

$$\frac{a\pm\sqrt{a^2-16(a-1)}}{4\,(a-1)}$$

139. Exprese en la forma más simple:

$$\frac{x^n}{(x+y)^n}+\frac{2x^{n-1}}{(x+y)^{n-1}}-\frac{x^{n-2}}{(x+y)^{n-2}}$$

140. Dada la ecuación

$$x^2-mx+m^2-3m+2=0$$

a) Determinar para qué valores de m las raíces de la ecuación son iguales.

b) Determinar m de modo que una de las raíces sea el doble de la otra.

141. Resolver $\sqrt{9a^4+36a^3b-27a^2b^2+ab^3+b^4}$

142. Se pide determinar "a" de modo que en la ecuación, una de las raíces sea el cuadrado de la otra:

$$x^2-\frac{15x}{4}+a^2=0$$

143. Sea $ax^2+bx+c=0$ una ecuación cuyas raíces son x' y x''. Buscar otra ecuación cuyas raíces sean $\frac{1}{x'}$ y $\frac{1}{x''}$

144. Determinar p y q de manera que las raíces de $x^2 - px - q = 0$ tengan por diferencia 2i y estén en la razón de 1 : 3.

145. Resolver:

$$3x^2(a+b+c) + 4x(ab+bc+ac) + 4abc = 0$$

146. Reducir a la forma más simple:

$$(a+xi)\ (a-xi)^{-1} - (a-xi)\ (a+xi)^{-1}$$

Santiago, 1951.

147. Determinar m de modo que las raíces de la siguiente ecuación sean iguales y de signo contrario:

$$(z^2 - az)\ (m+1) - (bz - c)\ (m-1) = 0$$

Santiago, 1951.

148. Determinar los valores que deben tener a y b para que las siguientes ecuaciones tengan raíces iguales:

$$(7a-2)\ x^2 - (5a-3)\ x + 1 = 0$$
$$8bx^2 - (4b+2)\ x + 2 = 0$$

149. Verifique la expresión:

$$\frac{c^2}{x^{-2}} + (a^2 - b^2)^{1/2} - \frac{(cx)^6}{(a+b)^2} - \frac{(a-b)}{c^{-1}\,x^{-1}}^{1/2}$$ se reduce a cero para $x = (c^{-1})\ \sqrt{a+b}$

150. Se sabe que $e = 2{,}72$ y que $e^3 = 20$.

Determine lo más cómodamente posible, los valores de e^7 y

$$\sqrt[4]{e^{-e^3}}$$

Talca, 1953.

151. Resuelva y discuta:

$$8(1 - x\sqrt{x}) = 4\left(\sqrt{x} - \frac{3}{2}\right)^2 - 1$$

152. Reducir al máximo la expresión:

$$\left(m^{\frac{a}{b}} \cdot n^{-1}\right)^{b} : \left(\frac{m^{a^2-b^2}}{n^{ab+b^2}}\right)^{\frac{1}{a+b}}$$

(Talca).

153. Resuelva y discuta:

$$\frac{x}{a} \pm \frac{a}{x} = \frac{b}{x} \pm \frac{x}{b}$$

Temuco, 1954

154. Verifique la identidad:

$$\tfrac{1}{2}(5+\sqrt{7})^2 - 2(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2 = \sqrt{415-40\sqrt{105}}$$

155. Resolver:

$$5x^2+\sqrt{5x^2+x+1} = 5-x$$

156. Resolver la ecuación: $(x^2-x-20)\ (x^2-x-42) = 504$

Talca, 1954

157. Se pide construir un $\triangle$ rectángulo de hipotenusa dada $AB=c$ y en ella el punto de intersección de la bisectriz del ángulo recto.

Valdivia, 1956

158. En una $\odot$ de $r=30$ cm. el $\measuredangle$ del centro AOB mide $60°$. Se pide calcular el área del círculo tangente a los lados del $\measuredangle AOB$ y a la $\odot$.

159. Si α y β son las raíces de la ecuación $x^2+px+9=0$, forme la ecuación cuyas raíces son $(\alpha+\beta)^2$ y $(\alpha-\beta)^2$.

160. Si las raíces de la ecuación $ax^2+bx+b=0$ están en la razón de m : n, demuestre que:

$$\sqrt{\frac{m}{n}} + \sqrt{\frac{n}{m}} + \sqrt{\frac{b}{a}} = 0$$

161. Resuelva: $$\frac{a+b\sqrt[n]{cx+d}}{b+f\sqrt{cx+d}} = g.$$

162. En un $\triangle$ ABC se conoce el lado AC=b. Se pide calcular los lados BC=a y AB=c, en función de "b", sabiendo que la bisectriz del $\measuredangle\ \beta$, es media proporcional geométrica entre los segmentos que esta bisectriz determina sobre el lado "b" y que la transversal de gravedad, t_b, es media proporcional geométrica entre los lados "a" y "c". Dígase de qué naturaleza es el triángulo ABC.

GEOMETRIA
TERCERA PARTE

GEOMETRIA

PROF. OMER CANO

TERCERA PARTE
Correspondiente al 6º Año de Humanidades

TERCERA PARTE

correspondiente al 6º Año de Humanidades

Programa de Geometría correspondiente al 6º Año de Humanidades

GEOMETRIA DEL ESPACIO

1) Repaso de las materias tratadas anteriormente.

2) Angulos: diedros, triedros, poliedros.

3) Traslaciones: Simetrías, homotecia.

4) Superficies y volúmenes de cuerpos fundamentales poliédricos y redondos.

CAPITULO XVII

EXPRESION DE LOS LADOS DE LOS POLIGONOS REGULARES INSCRITOS Y CIRCUNSCRITOS EN FUNCION DEL RADIO r. — METODO DE LOS PERIMETROS PARA EL CALCULO DEL NUMERO π.

§ *1.—GENERALIDADES*

Llámase *polígono regular* el que tiene sus lados y ángulos iguales.

Si los lados son cuerdas de una circunferencia, y los vértices están sobre ella, el polígono es *inscrito*. Se acostumbra designar el lado por la letra **l** (minúscula), con un subíndice que indica el número de lados del polígono: $\mathbf{l}_3$, $\mathbf{l}_4$, $\mathbf{l}_5$... Si no se conoce el número de lados, $\mathbf{l}_n$.

Si los lados del polígono son tangentes de una circunferencia, el polígono es *circunscrito*. El lado se designa por **L** (mayúscula) que tiene por subíndice un número igual al número de lados: $\mathbf{L}_3$, $\mathbf{L}_4$, $\mathbf{L}_5$... $\mathbf{L}_n$.

No se pueden construir todos los polígonos regulares por procedimientos geométricos clásicos (con compás y regla).

Por ejemplo, no se pueden construir los polígonos regulares de 7, 11, 13 lados... etc.

Se pueden construir con procedimientos elementales los polígonos regulares comprendidos en los grupos siguientes:

I.—Los incluídos en la fórmula: $3 \cdot 2^n$ (n es un número entero mayor o igual que cero).

Siendo $\mathbf{n}=0$, se tiene el triángulo equilátero.

Siendo $\mathbf{n}=1$, se tiene el hexágono regular.

Siendo **n**=2, se tiene el dodecágono regular.

Siendo **n**=3, se tiene el polígono regular de 24 lados, etc.

II.—Los incluídos en la fórmula: $4 \cdot 2^n$: cuadrado, octógono, polígono de 16 lados, etc.

III.—Los incluídos en la fórmula: $5 \cdot 2^n$: pentágono, decágono, icoságono, polígono de 40 lados, etc.

IV.—Los incluídos en la fórmula: $15 \cdot 2^n$: pentadecágono, polígono de 30 lados, etc.

La $\perp$ del centro a un lado del polígono regular, se llama *apotema*. Se designa por ρ con un subíndice igual a número de lados del polígono: $\rho_3, \rho_4, \rho_5 \ldots \rho_n$. En figura 280 **OH** es la apotema ρ_6.

§ 2.—HEXAGONO REGULAR Y TRIANGULO EQUILATERO INSCRITOS

a) PROBLEMA 23.—*Construir en una ⊙ dada un hexágono* [1] *regular inscrito y calcular su lado* l_6 *en función de* r.

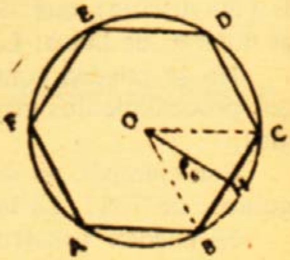


Fig. 280

Construcción.—Se aplica el radio **r** seis veces como cuerda en la circunferencia y se unen los puntos consecutivos. (**Fig. 280**).

Dem.) △ BCO equilátero

∢ **BOC**=60°

$$\boxed{\mathbf{BC}=\mathbf{l_6}=\mathbf{r.}}$$

---

(1) Del hexágono regular inscrito se deducen sucesivamente el dodecágono regular inscrito y los polígonos de 24, 48 y 96 . . ., $3 \cdot 2^n$ lados.

b) PROBLEMA 24.—*Inscribir en una ⊙ dada un △ equilátero y calcular su lado l_3, la apotema ρ_3 y su área a_3, en función de r.*

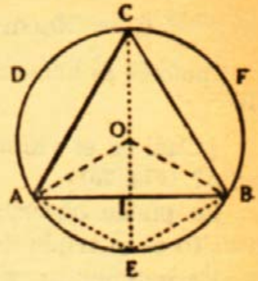


Fig. 281

1º **Construcción.**— Se divide la ⊙ en seis partes iguales. (Fig. 281).

Se unen los puntos uno por medio. ABC=△ equilátero.

2º **Cálculo de AC=l_3 en f (r)** [1]

1.er modo: Se dibuja el diámetro CE.

E(↔)A

△ECA rectángulo en A. (Teor. de Thales).

Luego $\overline{AC}^2=\overline{EC}^2-\overline{AE}^2$ (Teor. Pit. 2ª forma)

$$l_3^2= 4r^2-r^2=3r^2$$

De donde: $\boxed{l_3=r\sqrt{3}}$

2º modo de calcular l_3.—AEBO es un rombo.

Por tanto: Las diagonales se dimidian y se cortan perpendicularmente.

Luego: AI · IB = EI · IC. (Teorema LXIV).

$$\frac{l_3^2}{4}=\frac{r}{2}\left(\frac{r}{2}+r\right)=\frac{r^2}{4}+\frac{r^2}{2}$$

$$l_3^2 = r^2+2r^2=3r^2$$ (multiplicando por 4 ig. anterior)

$$l_3 = r\sqrt{3}$$

---

(1) f(r), léase en función de r.

$$\text{Siendo } r = \frac{1}{2}\, m \text{ y } \sqrt{3} = 1{,}73\ldots \text{ (aprox.)}$$

$$l_3 = 50[cm] \cdot 1{,}73 = 86{,}50[cm] \text{ (aprox.)}$$

También se hubiera podido calcular l_3 considerando $\triangle$ rect. AIO.

¿Cuál es el valor del apotema OI $= \rho_3$ en función del radio? (Fig. 281).

Se puede observar que la altura de un $\triangle$ equilátero inscrito es el triple de su apotema. (Fig. 281).

Para tener la relación de la altura h, en función del lado l_3 de un $\triangle$ equilátero, cuyo valor es útil retener para los problemas, se considera el $\triangle$AIC rect. (Fig. 281). y se aplica el teorema particular de Pitágoras.

$$\overline{CI}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{AI}^2$$

$$h^2 = l_3^2 - \frac{l_3^2}{4} = \frac{4l_3^2 - l_3^2}{4} = \frac{3l_3^2}{4}$$

$$\boxed{h = \frac{l_3}{2}\sqrt{3}} \quad \text{(Retener este valor)}$$

¿Cuánto vale h en función de r?

NOTA.—El triángulo isósceles [1] que se forma al unir el centro con dos vértices consecutivos de un polígono regular inscrito, se llama triángulo fundamental del polígono. En Fig. 281 $\triangle$ ABO. Obtenido este triángulo es fácil construir el polígono total.

---

(1) En el cuadrado inscrito el $\triangle$ fundamental es un $\triangle$ rectángulo isósceles. En el hexágono reg. inscrito, es un $\triangle$ equilátero.

§ 3.—*CUADRADO Y OCTOGONO INSCRITOS*

PROBLEMA 25.—*Inscribir en una circunferencia dada un cuadrado y calcular su lado l_4, la apotema ρ_4 y su área a_4, en función de* **r**.

1º **Construcción.**—Se construyen dos diámetros $\perp$ AC y DB. En seguida se unen sus extremos.

ABCD cuadrado inscrito. (Fig. 282).

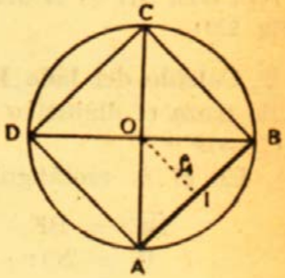


Fig. 282

2º **Cálculo** del lado $AB = l_4$ en función de r.

En la Fig. 282.

$\triangle ABO$ rectángulo en O.

Luego: $\overline{AB}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{BO}^2$

$$l_4^2 = r^2 + r^2 = 2r^2$$

De donde:

$$\boxed{l_4 = r\sqrt{2}}$$

Ejemplo: Si $d = 1$ m.

$r = 50$ cm

$l_4 = r\sqrt{2} = 50 \text{ cm} \cdot 1{,}4, \ldots = 70{,}50$ cm.

¿Cuánto vale el apotema $OI = \rho_4$, (Fig. 282), en función de r?

PROBLEMA 26.—*Construir en una* ⊙ *dada un octógono inscrito y calcular su lado l_8 en función de* **r**.

1º Construcción.— Primero se construye cuadrado ACEG. En seguida se dividen los arcos, AC, CE. . . en dos partes iguales.

ABCDEFGH es el octógono (Fig. 283).

2º Cálculo del lado $BC = l_8$. Se traza el diámetro BF $C(\leftrightarrow)F$

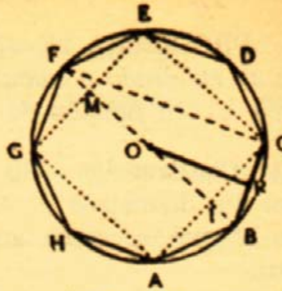


Fig. 283

En el $\triangle$ rectángulo BFC se tiene:

$$\overline{BC}^2 = BF \cdot BI \qquad \text{(Teor. LXI)}$$
$$l_8^2 = 2r(r - \rho_4)$$

$$\text{Pero } OI = \rho_4 = \frac{1}{2} r\sqrt{2}$$

$$l_8^2 = 2r(r - \frac{1}{2} r\sqrt{2}) = 2r^2 - r^2\sqrt{2} = r^2(2 - \sqrt{2})$$

$$\boxed{l_8 = r\sqrt{2 - \sqrt{2}}}$$

OBSERVACION.— Del octógono regular inscrito se pasaría del mismo modo y sucesivamente al polígono regular de 16, 32, 64 . . . 4 . 2^n lados.

§ 4.—*DECAGONO Y PENTAGONO INSCRITOS*

Para construir el decágono inscrito hay que resolver previamente el siguiente problema conocido con el nombre de *división de un segmento* (o trazo) *en sección aúrea o divina o en media y extrema razón.*

PROBLEMA 27.—*Dividir un trazo dado* **AB=a**, *en media y extrema razón o en sección aúrea o divina.*

Dividir un trazo en media y extrema razón o en sección aúrea es dividirlo en dos partes desiguales tales que, el segmento mayor sea media proporcional geométrica entre el trazo entero y el segmento menor.

Ejemplo: Si el trazo AB. (Fig. 284) quedase dividido por F en sección aúrea se verificaría la siguiente proporción:

AB : AF = AF : FB

Solución.—Sea **AB=a** el trazo dado. (Fig. 284).

Hágase: $BO \perp AB$

$$BO = \frac{1}{2} AB$$

⊙ (O, OB)

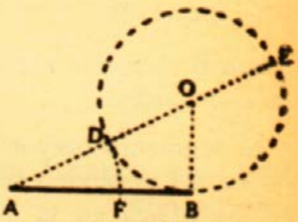


Fig. 284

Trazar secante AOE.

Se hace: AF=AD.

El punto **F** divide al trazo AB=**a**, en media y extrema razón.

De modo que resulta:

AB : AF = AF : FB.

Demostración.—En virtud del Teor. LXVI que relaciona la secante y la tangente que parten de un mismo punto, en Fig. 284 se tiene:

AE : AB = AB : AD.

Descomponiendo esta proporción, resulta:

(AE—AB) : AB=(AB—AD) : AD

Pero como: AB=DE (constr.)
y AF=AD
resulta: AE—AB=AF
y AB—AD=FB
Luego: AF : AB=FB : AF
Invìrtiendo la última prop. se tiene:
AB : AF=AF : FB. (Q. E. D.)

PROBLEMA 28.—*Construir en una ⊙ dada un decágono regular inscrito y calcular su lado l_{10} en función de* **r.**

1º **Construcción.**— El radio OA se divide en media y extrema razón. (Probl. 27).

Sea **B** el punto que divide OA en sección aúrea.

El segmento mayor OB es el lado l_{10} del decágono regular inscrito. Se aplica en la circunferencia como cuerda, diez veces. (Fig. 285).

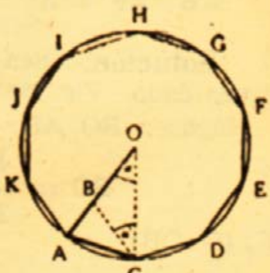


Fig. 285

Demostración.—O(↔)C(↔)B

Si AC=OB, es el lado l_{10} del decágono regular inscrito, el ∢ del centro correspondiente, α, debe medir $\frac{360°}{10} = 36°$.

En efecto: △ACO∼△ABC (2º caso).
Tienen: AO : AC=AC : AB (Div. de AO en secc. aúrea)
y ∢OAC = ∢CAB (común).
Pero △ACO es isósceles.
También su ∼△ABC, debe ser isósceles
Resulta: AC=BC=OB.

Por tanto: $\triangle OBC$ isósceles.

$\therefore \quad \alpha=\alpha'$

$\sphericalangle ABC=2\alpha=\sphericalangle BAC=\sphericalangle ACO$

Luego en el $\triangle ACO$ se tiene:

$$\sphericalangle \text{ en } O = \alpha$$
$$\sphericalangle \text{ en } A = 2\alpha$$
$$\sphericalangle \text{ en } C = 2\alpha$$

Sumando: $\sphericalangle O+\sphericalangle A+\sphericalangle C=5\alpha=180°$

$\alpha= 36°$

Luego: $AC=OB=l_{10}$ (Q. E. D.)

2º.—**Cálculo** del lado $AC=l_{10}$ en f (r). (Fig. 285).

Se sabe que: $OA : OB=OB : AB$ (Por división en secc. aúrea de OA).

Pero : $OA=\mathbf{r}$.

$OB=AC=l_{10}$

Entonces: $r : l_{10}=l_{10} : (r-l_{10})$

$l^2_{10}=r^2-rl_{10}$

Se ordena la ecuación de 2º grado y se resuelve:

$$l^2_{10}+rl_{10}-r^2=0.$$

$$l_{10}=-\frac{r}{2}\pm\sqrt{\frac{r^2}{4}+r^2}=-\frac{r}{2}\pm\sqrt{\frac{5r^2}{4}}=-\frac{r}{2}\pm\frac{r}{2}\sqrt{5}$$

$$l'_{10} = -\frac{r}{2} + \frac{r}{2}\sqrt{5};$$

$$l''_{10} = -\frac{r}{2} - \frac{r}{2}\sqrt{5}.$$

La 2ª raíz no conviene a l_{10} por ser de valor negativo.

Entonces se tiene que:

$$\boxed{l_{10} = -\frac{r}{2} + \frac{r}{2}\sqrt{5} = \frac{r}{2}(\sqrt{5}-1)}$$

Observaciones.—a) Si se unen los vértices, uno por medio, del decágono regular inscrito, resulta el pentágono regular inscrito. (Fig. 286).

b) Si se subdividen sucesivamente los arcos AB, BC, CD... (Fig. 286). en 2, 4, 8 partes iguales, se obtienen los polígonos de 20, 40, 80... $5 \cdot 2^n$ lados.

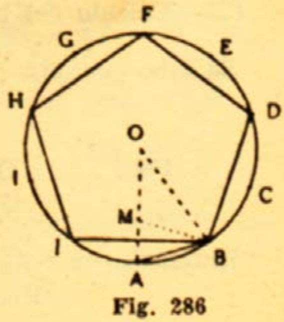


Fig. 286

§ 5.—*PENTADECAGONO*

PROBLEMA 29.—*Construir en una circunferencia el pentadecágono regular inscrito y calcular su lado l_{15} en función de r.*

1º Construcción.— (Ver figura 287).

Se hace:

$AB = l_{10}$
$AC = r = l_6$
$B(\leftrightarrow)C$
$BC = l_{15}$

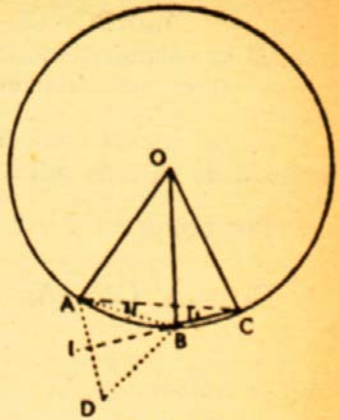


Fig. 287

2º Demostración.—Para que BC sea l_{15} se requiere que

$$\sphericalangle BOC = \frac{360^\circ}{15} = 24^\circ$$

En efecto:

$\sphericalangle BOC = \sphericalangle AOC - \sphericalangle AOB$

Pero: $\sphericalangle AOC = 60^\circ$ ($\triangle$ACO equil.)

y $\sphericalangle AOB = 36^\circ$ ($AB = l_{10}$)

Luego: $\sphericalangle BOC = 60^\circ - 36^\circ = 24^\circ$.

3º Cálculo de l_{15} en función de **r**.

Se prolonga $CB \rightarrow B$ (Fig. 287).

Se hace: $AI \perp CI$

$D(\leftrightarrow)B$

Resulta que ADB es $\triangle$ equilátero.

En efecto, $\sphericalangle ABI = \sphericalangle 1 + \sphericalangle 2$ (Un $\sphericalangle$ ext. de un $\triangle$ es =)

Pero $\sphericalangle\ 1 = 18^\circ$ (Propiedad del $\sphericalangle$ inscrito)

y $\sphericalangle\ 2 = 12^\circ$ (Propiedad del $\sphericalangle$ inscrito)

$\sphericalangle ABI = \sphericalangle IBD = \sphericalangle 1 + \sphericalangle 2 = 18^\circ + 12^\circ = 30^\circ$

$\therefore \quad \sphericalangle ABD = 60^\circ$

$$\sphericalangle BAD = \sphericalangle BDA = \frac{180^\circ - 60^\circ}{2} = 60^\circ$$

Por tanto $\triangle ADB$ es equilátero.

$$l_{15} = BC = CI - BI.$$

CI se calcula como cateto del $\triangle$ rectángulo CIA (Teor. particular de Pitágoras).

BI se calcula como altura del $\triangle$ equilátero ADB, en función de su lado $AB = l_{10}$. (Págs. 374 y 379).

Por tanto:

$$CI = \sqrt{CA^2 - AI^2} = \sqrt{r^2 - \left(\frac{l_{10}}{2}\right)^2} =$$

$$\sqrt{r^2 - \frac{r^2}{16}(6 - 2\sqrt{5})} = \sqrt{\frac{16r^2 - 6r^2 + 2r^2\sqrt{5}}{16}}$$

$$= \sqrt{\frac{10r^2 + 2r^2\sqrt{5}}{16}} = \sqrt{\frac{r^2}{16}(10 + 2\sqrt{5})}$$

$$= \frac{r}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$$

$$BI = \frac{1}{2}AB\sqrt{3} = \frac{1}{2}l_{10}\sqrt{3} = \frac{r}{4}(\sqrt{5} - 1)\sqrt{3}$$

Reemplazando se tiene:

$$l_{15} = BC = CI - BI = \frac{r}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} - \frac{r}{4}(5 - 1)\sqrt{3}$$

$$\boxed{l_{15} = \frac{r}{4}\left[\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} + \sqrt{3} - \sqrt{15}\right]}$$

OBSERVACION.—Como sería un tanto engorroso el cálculo directo del lado para cada polígono, deducido de la figura respectiva, se requieren:

a) Una fórmula general que permita pasar del lado l_n (lado de un polígono regular de **n** lados) conocido previamente, al cálculo del lado l_{2n} (lado del polígono regular inscrito de doble número de lados que el polígono de lado l_n.

b) Una fórmula general que permita calcular el lado L_n (lado de un polígono regular circunscrito de **n** lados (conocido el lado l_n del polígono inscrito del mismo número de lados.

§ 6.—*CALCULO DE LOS LADOS l_{2n} y L_n EN FUNCION DE r y l_n*

a) PROBLEMA 30.—*Calcular el lado l_{2n} de un polígono regular inscrito de 2_n lados* (doble número de lados), *dados el lado l_n del polígono regular inscrito y* **r**.

Solución.—Sea $AB=l_n$ (conocido) Fig. 288.

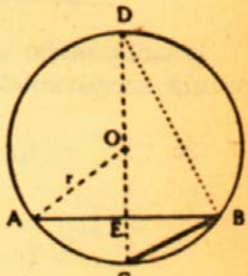


Fig. 288

Se hace: arc. CA=arc. CB

$C(\leftrightarrow)B$

Resulta: $CB=l_{2n}$

Se traza diámetro COD

$B(\leftrightarrow)D$

$\triangle$DCB rect. en B (Teor. de Thales).

Luego: $CD : CB=CB : CE$

$$2r : l_{2n} = l_{2n} : (r-\rho_n)$$

La apotema $OE = \rho_n$ se calcula como cateto del $\triangle$ rectángulo AEO:

$$OE = \rho_n = \sqrt{\overline{OA}^2 - \overline{AE}^2} = \sqrt{r^2 - \frac{l^2_n}{4}} =$$

$$\sqrt{\frac{4r^2 - l_n^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{4r^2 - l_n^2}$$

$$\therefore 1) \quad \boxed{\rho_n = \frac{1}{2}\sqrt{4r^2 - l_n^2}}$$

Sacando r^2 en factor común en la cantidad subradical y extrayendo raíz cuadrada, en la fórmula anterior, resulta:

$$2) \quad \boxed{\rho_n = \frac{r}{2}\sqrt{4 - (\frac{l_n}{r})^2}}$$

Reemplazando ρ_n por su valor, en igualdad anterior, resulta sucesivamente:

$$2r : l_{2n} = l_{2n} : \left(r - \frac{1}{2}\sqrt{4r^2 - l_n^2}\right)$$

$$l^2_{2n} = 2r\left[r - \frac{1}{2}\sqrt{4r^2 - l^2_n}\right]$$

Luego:

$$1) \quad \boxed{l_{2n} = \sqrt{2r(r - \frac{1}{2}\sqrt{4r^2 - l^2_n})}}$$

o bien: $$l_{2n} = \sqrt{2r^2 - r^2\sqrt{4 - \frac{l_n^2}{r^2}}}$$

2) $$\boxed{l_{2n} = r\sqrt{2 - \sqrt{4 - (\frac{l_n}{r})^2}}}$$

Mediante estas fórmulas si se conociera, por ejemplo, $\mathbf{l_4}$, en función de **r**, se podría determinar $\mathbf{l_8}$, también, en función de **r**. Conocido $\mathbf{l_8}$, se podría calcular $\mathbf{l_{16}}$, y así, sucesivamente, los lados $\mathbf{l_{32}}$, $\mathbf{l_{64}}$. . . etc., hasta el infinito. El mismo cálculo se puede hacer con los lados de los otros grupos de polígonos regulares: $\mathbf{l_3}$, $\mathbf{l_6}$. . . $\mathbf{l_5}$, $\mathbf{l_{10}}$. . ., etc.

Ejemplo: Sea $\mathbf{l_4} = r\sqrt{2}$, calcular $\mathbf{l_8}$.

Solución.—En cualquiera de las fórmulas anteriores, por ej. en (1), se reemplaza el primer miembro por $\mathbf{l_8}$ (incógnita); en el segundo miembro se reemplaza $\mathbf{l_n}$ por el valor de $\mathbf{l_4}$ (conocido):

$$l_8 = \sqrt{2r(r - \frac{1}{2}\sqrt{4r^2 - 2r^2}} = \sqrt{2r^2 - r\sqrt{2r^2}}$$

$$l_8 = \sqrt{2r^2 - r^2\sqrt{2}} = r\sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

Hágase el mismo cálculo empleando la fórmula (2).

OBSERVACION.—La fórmula:

$$l_{2n} = \sqrt{2r(r - \frac{1}{2}\sqrt{4r^2 - l^2{}_n})}$$

es reversible, o sea que, por medio de ella, se puede también, recíprocamente, calcular el lado l_n cuando se conoce el lado l_{2n}. La fórmula queda convertida en una ecuación irracional. (La incógnita está bajo el radical).

Ejemplo: Sabiendo que $l_8 = r\sqrt{2-\sqrt{2}}$, calcular l_4.

Solución.—Aplicando la fórmula anterior resulta la ecuación:

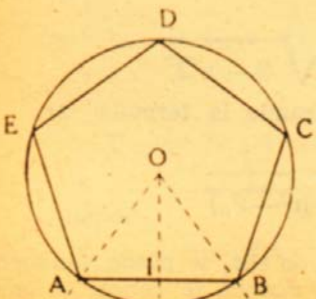
$$r\sqrt{2-\sqrt{2}} = \sqrt{2r\left(r \frac{1}{2} \sqrt{4r^2 - l_4^2}\right)}$$

$$2r^2 - r^2\sqrt{2} = 2r^2 - r\sqrt{4r^2 - l_4^2}$$ (Elevando al cuadrado, dividiendo por r y reduciendo)

$$\sqrt{4r^2 - l_4^2} = r\sqrt{2}$$
$$4r^2 - l_4^2 = 2r^2$$
$$l_4^2 = 2r^2$$
$$l_4 = r\sqrt{2}$$

Hágase el cálculo aplicando la fórmula (2) de la pág. 384.

b) PROBLEMA 31.—*Calcular el lado* $\mathbf{L_n}$ *de un polígono regular circunscrito en función de* **r** *y del lado* $\mathbf{l_n}$ *del polígono regular inscrito semejante* (mismo número de lados).



Solución.—Sea $AB = \mathbf{l_n}$ (conocido) (Fig. 289).

y $GF = \mathbf{L_n}$ (incógnita)

$OM = r$

$OI = \rho_n$

$\triangle OGF \sim \triangle OAB$ (Tienen $GF \parallel AB$)

$GF : AB = OM : OI$

$L_n : l_n = r : \rho_n$

Fig. 289

$$L_n = \frac{r \cdot l_n}{\rho_n} \quad (^1)$$

Pero $\rho_n = \frac{r}{2}\sqrt{4 - (\frac{l_n}{r})^2}$ **(Se calcula en $\triangle$ rect. OIB como en pág. 384, fórmula 2)**

Substituyendo en ig. (^{1}) ρ_n por su valor se tiene:

$$L_n = \frac{r \cdot l_n}{\frac{1}{2}\sqrt{4r^2 - l^2_n}} = \frac{2r\, l_n}{\sqrt{4r^2 - l^2_n}}$$ **(Se amplificó por 2 el 2º miembro)**

1) $$\boxed{L_n = \frac{2r\, l_n}{\sqrt{4r^2 - l^2 n}}}$$

también: $$L_n = \frac{r l_n}{\frac{r}{2}\sqrt{4 - \frac{l^2_n}{r^2}}} = \frac{2 l_n}{\sqrt{4 - (\frac{l_n}{r})^2}}$$

2) $$\boxed{L_n = \frac{2 l_n}{\sqrt{4 - (\frac{l_n}{r})^2}}}$$

Ejemplo: Calcular L_{12}, sabiendo que $l_{12} = r\sqrt{2 - \sqrt{3}}$

Solución: Aplicando la fórmula $L_n = L_{12} = \frac{2rl_n}{\sqrt{4r^2 - l^2_n}}$, se tiene sucesivamente:

$$L_{12} = \frac{2r \cdot r\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{4r^2-2r^2+r^2\sqrt{3}}} = \frac{2r^2\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2r^2+r^2\sqrt{3}}} = \frac{2r^2\sqrt{2-\sqrt{3}}}{r\sqrt{2+\sqrt{3}}}$$

$$L_{12} = \frac{2r\sqrt{2-\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{3}}} = \frac{4r-2r\sqrt{3}}{\sqrt{4-3}} =$$

$$\frac{2r(2-\sqrt{3})}{\sqrt{1}} = 2r(2-\sqrt{3})$$

$$\sqrt{3} = 1{,}7320508 \text{ y } r = \frac{1}{2}$$

Luego: $L_{12} = 2-1{,}7320508 = 0{,}2679492.$

Repetir el mismo cálculo aplicando la fórmula 2.

§ 7.—*CALCULO DE π POR EL METODO DE LOS PERIMETROS*

Se designa por π el número que indica las veces que el diámetro cabe en su circunferencia rectificada.

En términos más matemáticos π se define así: *es la razón de la circunferencia al diámetro.*

$$\boxed{\pi = \frac{C}{d}}$$

Esta fórmula sugiere dos métodos para el cálculo de π:

1º El método directo o *de los perímetros,* llamado *método de Arquímedes.* En él se calcula **C**, conocido **d**.

2º El método de los *isoperímetros,* llamado también *método Schwab.* Es inverso del anterior: Se da **C** y se calcula **d**.

Se tratará sólo el primer método.

Método de los perímetros.—Se parte de la fórmula $\pi = \frac{C}{d}$ (1).

---

(1) **También se puede partir de la fórmula: $\pi = \frac{C}{2r}$**

En este caso se hace $r=1$

Resulta: $\pi = \frac{C}{2}$

Se hace **d**=**l**, (cm, m, pulgada..., u otra unidad cualquiera de longitud).

Resulta: π=**C** [1].

El cálculo de π se reduce a calcular la longitud de la circunferencia **C** cuyo diámetro **d**=**1** (cm, m, pulg... etc).

Pero **C** es el límite a que tienden los perímetros de los polígonos regulares inscritos y circunscritos al duplicar sucesiva e indefinidamente sus lados.

Si el número de lados del polígono regular, inscrito o circunscrito, se duplicara hasta el infinito, al final resultaría el círculo y en este caso se tendría que **C** sería exactamente igual, también, al número π.

Si el número de lados del polígono no se duplica hasta el infinito, resulta:

a) **C** = *perímetro* polígono regular *inscrito* = π, pero sólo aproximadamente y por defecto.

b) **C** = *perímetro* polígono regular *circunscrito* =π, pero también aproximadamente, y en este caso, por exceso.

Prácticamente para tener por aproximación la longitud de la circunferencia **C** de diámetro **d**=**1** y, por tanto, el valor de π, hay que resolver los problemas siguientes:

1º En una serie o grupo cualquiera de *polígonos regulares inscritos,* se calcula el lado $\mathbf{l}_n$ y el *perímetro de un* primer polígono de **n** lados.

---

(1) Obsérvese que **C** se mide en unidades de longitud: cm, m, pulgada, etc. En cambio π, que es una razón, no lleva tales denominaciones. Pero el número absoluto (sin denominación) que expresa la longitud de **C**, el mismo, expresa y es igual al valor de π.

Por ejemplo, podría ser el cuadrado inscrito, el hexágono inscrito, etc.

2º En la misma serie de polígonos se calcula el lado l_{2n} y el *perímetro* del polígono regular *inscrito* que resulta al duplicar los lados del primer polígono que se elige. Se aplica la fórmula:

$$l_{2n} = \sqrt{2r\left(r - \frac{1}{2}\sqrt{4r^2 - l^2_n}\right)}$$

Se continúa calculando los lados y perímetros, cuantas veces se quiera, de los polígonos inscritos, cuyo número de lados se va sucesivamente duplicando indefinidamente. Se aprovecha la misma fórmula anterior.

3º Se hacen los mismos cálculos con los *polígonos regulares circunscritos* con el fin de tener los *perímetros*. Se aplica para ello la fórmula vista anteriormente:

$$L_n = \frac{2r\,l_n}{\sqrt{4r^2 - l^2_n}}$$

Comparando cada par de valores de los perímetros de dos polígonos regulares *inscrito y circunscrito*, de mismo número de lados (polígonos semejantes), puede uno darse cuenta de la aproximación del número π, la cual será tanto más cercana a dicho número cuanto mayor es el número de lados de los dos polígonos.

Para cada par de valores de tales perímetros, el número cuyas cifras (enteras y decimales) son comunes a los valores de ambos perímetros, es la parte exacta alcanzada del Nº π.

Los cuadros que van a continuación darán una idea más clara del proceso indicado para el cálculo de π.

Siguiendo a **Arquímedes**, se ha partido del hexágono regular inscrito.

POLIGONOS REGULARES INSCRITOS

Nº de lados	Valor del lado en función de $r = \frac{1}{2}$		Perimetros
6	$l_6 = r$	$= 0{,}50$	3,00000
12	$l_{12} = r\sqrt{2-\sqrt{3}}$	$= 0{,}258195$	3,10582
24	$l_{24} = r\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$	$= 0{,}1305262$	3,13262
48	$l_{48} = r\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$	$= 0{,}0654031$	3,13934
96	$l_{96} = r\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}$	$= 0{,}0327190$	3,14102
192	$l_{192} = r\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}}$	$= 0{,}01636161$	3,14142
384	$l_{384} = r\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}}}$	$= 0{,}00818113$	3,14155
768	$l_{768} = r\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}}}}$	$= 0{,}00409060$	3,14158
...	... ...	...	...

POLIGONOS REGULARES CIRCUNSCRITOS

Nº de lados	Valor del lado en función de $r = \frac{1}{2}$	Perimetros
6	$L_6 = \frac{2r}{3}\sqrt{3} = \frac{1}{3} \cdot 1{,}7320508 = 0{,}5773502$	3,46410
12	$L_{12} = 2r(2-\sqrt{3}) = 1(2-1{,}7320508) = 0{,}2679492$	3,21539
24	$L_{24} = 2r(2\sqrt{2+\sqrt{3}} - 2 - \sqrt{3}) = 0{,}1316524$	3,15965
...	... ...	...
384	$L_{384} = \frac{2r \cdot l_{384}}{\sqrt{4r^2 - l_{384}^2}} = \frac{1 \cdot 0{,}00818113}{\sqrt{1 - 0{,}00818113^2}} = 0{,}00818141$	3,14166
768	$L_{768} = \frac{2r \cdot l_{768}}{\sqrt{4r^2 - l_{768}^2}} = \frac{1 \cdot 0{,}00409060}{\sqrt{1 - 0{,}00409060^2}} = 0{,}0040907$	3,14165
...	... ...	...

Puede observarse en los dos cuadros anteriores cómo van aumentando los perímetros en los polígonos inscritos, y, disminuyendo en los circunscritos, a medida que aumentan los lados en ambas clases de polígonos.

Se puede ver, también, cómo los mismos perímetros tienden a confundirse en un límite común que, como se ha dicho, es el valor del número π.

Si nos detenemos en el polígono regular de 768 lados (inscrito y circunscrito) se puede deducir que π está comprendido entre los perímetros 3,14158 y 3,14165 de los polígonos regulares de lados l_{768} y L_{768}, respectivamente, o sea que:

$$3{,}14158 < \pi < 3{,}14165$$

Como estos perímetros coinciden hasta la tercera cifra decimal, el valor: $\pi = 3{,}141$, queda determinado exactamente hasta dicha tercera cifra, inclusive.

Siendo π un número inconmensurable sólo se podrán obtener para él valores aproximados. No puede ser estrictamente igual a ningún número entero ni fraccionario.

En la práctica, suelen utilizarse los siguientes valores aproximados:

$$\pi = 3{,}1416.$$

$$\pi = \frac{22}{7}$$

§ 8.—*RECTIFICACION DE LA CIRCUNFERENCIA Y CUADRATURA DEL CIRCULO*

a) Rectificación de la circunferencia.— Este problema consiste en construir geométricamente una recta equivalente a la longitud de una circunferencia.

Como π es un número inconmensurable, es imposible construir geométricamente una recta exactamente igual a la longitud de la circunferencia. Sólo existen soluciones aproximadas.

1° **La de Specht.**—Sea la circunferencia C de centro O. (Fig. 290).

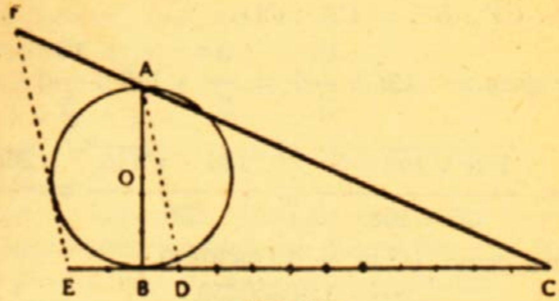


Fig. 290

El diámetro **AB**=**d** se divide en cinco partes iguales.

En **B** se traza la tangente $\mathbf{BC} = \frac{11}{5}$ del diámetro **d**.

C(↔)A.

En △ rectángulo **ABC** se tiene:

$$\mathbf{AC} = \sqrt{\mathbf{d}^2 + (\frac{11}{5}\mathbf{d})^2} = \frac{\mathbf{d}}{5}\sqrt{146}$$

Se toman : $\mathbf{BD} = \dfrac{\mathbf{d}}{5}$

y $\mathbf{BE} = \dfrac{2}{5}\mathbf{d}$

A(↔)D

Se traza **EF** ∥ AD

Se prolonga CA→A, hasta cortar **EF** en **F**.

Resulta **CF** igual, aproximadamente, a C. (Circunf.)

Demostración.— $\triangle CEF \sim \triangle CDA$ (Toda $\parallel$ a un lado de un $\triangle$... Pág. 245).

Luego: $CF : CE = CA : CD$

Reemplazando: $CF : \frac{13}{5}d = \frac{d}{5}\sqrt{146} : \frac{10}{5}d$

$$CF = \frac{13d^2\sqrt{146} \cdot 5}{25 \cdot 10d} = \frac{13d \cdot \sqrt{146}}{50} = \frac{26d\sqrt{146}}{100}$$

pero como $\sqrt{146} = 12{,}0830459$

resulta: $CF = \dfrac{26d \cdot 12{,}0830459}{100} = 3{,}1415934$ **d.**

Luego: $CF = 3{,}1415934 \cdot 2r = \pi \cdot 2r = C.$

Este valor es exacto hasta la quinta cifra decimal.

2º **La de Wicke** (de Rengo)

Se construye un $\triangle$ rectángulo ABC de catetos 2r y r. (Fig. 291).

La hipotenusa AB será igual a $r\sqrt{5}$.

Luego el perímetro es:

$2r + r + r\sqrt{5} = r\ (3 + \sqrt{5})$
$= r \cdot 5{,}236068.$

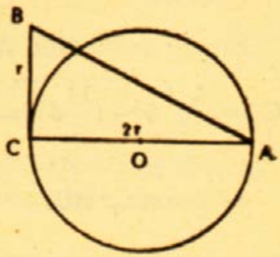


Fig. 291

Los $\frac{3}{5}$ de este perímetro son aproximadamente igual a la semicircunferencia.

En efecto: $\dfrac{5{,}236068 \cdot 3r}{5} = 3{,}14161$ **r** $= \pi$**r.**

b) **Cuadratura del círculo.**—Consiste en construir un cuadrado equivalente a un círculo dado, geométricamente.

Si el lado del cuadrado = x

Resulta la ecuación: $x^2 = \pi r^2$.

Transformando la igualdad anterior en proporción se tiene: $r : x = x : \pi r$.

El lado del cuadrado es M. p. g. entre **r** y la semicircunferencia πr.

Como es imposible construir una recta exactamente igual a una semicircunferencia, puesto que π es inconmensurable, el problema no tiene solución exacta.

EJERCICIOS DE APLICACION

1. Desde un punto A situado en una ⨀ de centro O, parten las cuerdas $AB = l_6$ y $AC = l_5$. ¿De qué polígono regular es el lado la cuerda BC?

Idem, ¿si $AB = l_6$ y $AC = l_4$? Idem, ¿si $AB = l_3$ y $AC = l_4$?
Idem, ¿si $AB = l_4$ y $AC = l_5$? Idem, si $AB = l_8$ y $AC = l_{12}$?

2. Dada una ⨀ de radio r = 12 cm, calcular: a) el perímetro del cuadrado inscrito; b) el área comprendida entre los cuadrados inscrito y circunscrito; c) el perímetro del △ equilátero inscrito; d) el perímetro del △ equilátero circunscrito; e) la apotema ρ_3; f) el área del △ equilátero inscrito; g) el área del △ equilátero circunscrito.

3. En una ⨀ de radio = b determinar la razón entre las áreas: 1º) de los cuadrados inscrito y circunscrito en dicha ⨀; 2º) de los △s equiláteros inscrito y circunscrito; 3º) de los hexágonos regulares inscrito y circunscrito; 4º) del hexágono regular inscrito y △ equilátero inscrito.

4. En un △ equilátero cuyo lado mide 36 cm, se inscribe y circunscribe una ⨀. Calcular los radios de ambas ⨀s.

5. En una ⊙ se inscribe y circunscribe un △ equilátero. Calcular el radio de dicha ⊙ si el área comprendida entre ambos polígonos es $36\sqrt{3}$ cm^2.

6. Si la diferencia de las áreas entre los hexágonos regulares inscrito y circunscrito a una misma ⊙ es $18\sqrt{3}$. Determinar el radio de esta ⊙.

7. A partir del extremo A de un diámetro AB de una ⊙, se aplican sucesivamente y en el mismo sentido, las cuerdas $AC = l_4$ y $CD = l_{12}$. Si se une D con B, ¿de qué polígono es el lado la cuerda DB?

8. Dado un pentágono regular inscrito ABCDE, desde el vértice A se trazan la diagonal AC y una cuerda AF= al lado del △ equilátero inscrito. ¿De qué polígono regular es lado la cuerda FC.

9. Si un △ rectángulo tiene por catetos l_6 y l_{10}, tendrá por hipotenusa l_5, en el mismo círculo. Calcular l_5 en función del radio **r**.

INDICACIONES:

$AB = l_{10}$ (Fig. 292).
Se prolonga $AB \rightarrow B$
Se hace: $AC = AO = r = l_6$
Resulta: CA : AB = AB : CB.
(Probl. 28, pág. 378).

Desde C se traza la tangente CD a la circunferencia O.

$D(\rightarrow O$.

Resulta CA : CD = CD : CB
Teor. de la tang., pág. 310).

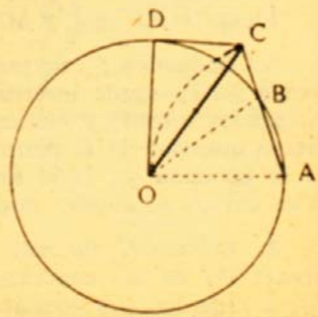


Fig. 292

10. Dado un círculo, construir el lado del decágono y del pentágono regulares en la misma figura y sin dividir previamente el radio en sección aúrea.

Solución.– Se traza diámetro AB. (Fig. 293).

$OC \perp AB$

Se hace $MO = MA$

Con centro en M y radio MC se describe arco CD

$OD = l_{10}$

$CD = l_5$

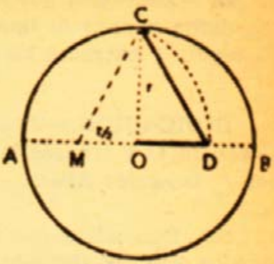


Fig. 293

Demostración.—En $\triangle$ rect. CMO se aplica teor. de Pitág.: $\overline{MC}^2 = \overline{MO}^2 + \overline{OC}^2 = \frac{r^2}{4} + r^2 = \frac{5r^2}{4}$

$$MC = MD = \sqrt{\frac{5r^2}{4}} = \frac{r}{2}\sqrt{5}$$

Luego: $OD = MD - MO = \frac{r}{2}\sqrt{5} - \frac{r}{2} = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1) = l_{10}$

También $CD = l_5$. En efecto, aplicando teor. part. de Pitág. en $\triangle$ rect. COD, se tiene:

$$CD = \sqrt{\overline{OC}^2 + \overline{OD}^2} = \sqrt{r^2 + [\frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1)]^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{4r^2 + 6r^2 - 2r^2\sqrt{5}}{4}} = \frac{\sqrt{10r^2 - 2r^2\sqrt{5}}}{4} =$$

$$= \frac{r}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} = l_5$$

11. Demostrar que si en una circunferencia una cuerda $AB = l_{10}$, dicha cuerda es igual al segmento mayor del radio dividido en media y extrema razón.

INDICACION.—Unanse los extremos A y B de la cuerda con el centro O y trácese la bisectriz de uno de los ángulos basales del $\triangle$ isósceles ABO.

12. Demostrar que las diagonales AD y BE de un pentágono regular ABCDE inscrito se cortan en un punto M en media y extrema razón.

13. La altura de un $\triangle$ equilátero inscrito mide 1 m. Calcular el perímetro del $\triangle$ semejante circunscrito al mismo círculo.

14. Demostrar que en todo $\triangle$ isósceles cuyo ángulo basal es el duplo del ángulo del vértice, la bisectriz de un ángulo basal divide al lado opuesto en media y extrema razón.

15. ¿Cuál es el valor de la apotema de un hexágono regular cuyo perímetro es 120 m.?

• **16.** La apotema de un hexágono regular es 2,80. Calcular el perímetro del hexágono.

• **17.** Calcular la apotema ρ_8 de un octógono regular inscrito en una circunferencia de radio $= 6$ cm.

• **18.** Si $l_8 = 4$ cm, calcular la apotema ρ_8 (octógono regular inscrito).

• **19.** En un octógono regular inscrito $l_8 = 1$ m. ¿Cuánto mide r del círculo circunscrito?

20. La diferencia entre l_4 y l_8 de un cuadrado y octógono regular inscritos en una misma circunferencia es 3 m. Calcular el radio de la circunferencia y los lados de ambos polígonos.

• **21.** Calcular la apotema ρ_{10} del decágono regular inscrito, en función del radio r de la circunferencia circunscrita.

22. El lado l_{12} de un dodecágono regular inscrito mide 30 cm; determinar el radio de la circunferencia circunscrita.

• 23. Calcular l_{12}, sabiendo que $l_6=r$

• 24. Calcular l_8, sabiendo que $l_4=r\sqrt{2}$

25. Calcular l_6, deduciéndolo de $l_3=r\sqrt{3}$

• 26. Calcular l_{16}, sabiendo que $l_8=r\sqrt{2-\sqrt{2}}$

27. Calcular l_{24}, sabiendo que $l_{12}=r\sqrt{2-\sqrt{3}}$

28. Calcular l_3, sabiendo que $l_6=r$

29. Calcular l_4, partiendo de que $l_8=r\sqrt{2-\sqrt{2}}$

30. Calcular l_5, sabiendo que $l_{10}=\frac{r}{2}(\sqrt{5}-1)$

• 31. Calcular l_8, sabiendo que $l_{16}=r\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$

• 32. Calcular l_{10}, deduciéndolo de $l_5=\frac{r}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$

33. Calcular l_{20}, sabiendo que $l_{10}=\frac{r}{2}(\sqrt{5}-1)$

• 34. Calcular L_3, si $l_3=r\sqrt{3}$

• 35. Calcular L_4, si $l_4=r\sqrt{2}$

36. Calcular L_6, si $l_6=r$

• **37.** Calcular L_5, si $l_5 = \frac{r}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$

• **38.** Calcular L_8, si $l_8 = r\sqrt{2-\sqrt{2}}$

• **39.** Calcular L_{16}, si $l_{16} = r\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$

• **40.** Calcular L_{12}, si $l_{12} = r\sqrt{2-\sqrt{3}}$

41. Calcular L_{10}, si $l_{10} = \frac{r}{2}(\sqrt{5}-1)$

42. Calcular L_{24}, si $l_{24} = r\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$

mínese el radio de la $\odot$ circunscrita en función de m.

43. Calcular el valor de l_n en función de L_n y de r.

44. Calcular en función del radio r de la $\odot$: 1º el área del pentágono regular inscrito; 2º el área del pentágono regular circunscrito; 3º el área del hexágono regular inscrito; 4º el área del hexágono regular circunscrito; 5º el área del decágono regular inscrito; 6º el área del dodecágono regular circunscrito.

45. El perímetro del octógono regular inscrito en una $\odot$ es $32\sqrt{2+\sqrt{2}}$ metros. Calcular: 1º el radio r de la $\odot$; 2º el perímetro del octógono circunscrito; 3º el área del octógono inscrito; 4º el área del octógono circunscrito.

46. El área de un pentágono regular circunscrito es s^2. Determínese el radio de la $\odot$ inscrita en función de s.

47. El área de un octógono regular inscrito es m^2. Deter-

48. Las bases de un trapecio isósceles inscrito en una $\odot$ miden, respectivamente, 20 m y 12 m y el lado del mismo mide de 8 m. Calcular: 1º el área del trapecio; 2º el radio de la $\odot$ circunscrita.

49. Un trapecio isósceles inscrito en una $\odot$ de radio r, tiene por base menor r y por lado $r\sqrt{2}$. 1º Pruébese que las diagonales son $\perp$s; 2º Calcular el área del trapecio.

50. Demostrar que el área de un $\triangle$ rectángulo es igual al producto de los segmentos que el punto de contacto de la $\odot$ inscrita determina sobre la hipotenusa.

51. ¿Cuál es el perímetro de un octógono regular cuya área es igual 12 m^2?

52. Desde un punto A de una $\odot$ se trazan sucesivamenlas cuerdas $AB = BC = l_4$; $CD = l_6$, y finalmente, DA. Calcular: 1º el valor de los $\sphericalangle$s del trapezoide ABCD; 2º su perímetro; 3º su área.

53. En una semi $\odot$ de diámetro AB, se marcan los puntos C y D, sobre ella, de modo que arc. $AC = 60°$ y arc. $BD = 45°$. Enseguida se unen los puntos A, C, D y B. Calcúlese cada uno de los ángulos del trapezoide ABCD y su perímetro.

54. En una $\odot$ de radio r se inscribe un $\triangle$ equilátero ABC. Enseguida se une el punto medio D del arco AB con el punto medio E del lado BC y se prolonga DC hasta cortar la $\odot$ en F. Calcular en función de r, BE, DE, EF y AF.

55. En una semi $\odot$ de diámetro MN, desde el extremo M, se aplica la cuerda $MA = l_6$, y desde el extremo N, se aplica la cuerda $NB = l_{12}$. Calcular el área del trapezoide MABN en función del radio r de la $\odot$.

56. En una $\odot$ de radio r se marcan los puntos M, N, P y Q de modo que $MN = l_4$, $NP = l_{12}$ y $PQ = l_6$. Se pide calcular el área del trapezoide MQPN.

CAPITULO XVIII

APLICACION DEL ALGEBRA A LA RESOLUCION DE PROBLEMAS GEOMETRICOS

§ 1.—*PROCEDIMIENTOS QUE DEBEN OBSERVARSE EN LA RESOLUCION ALGEBRAICA DE LOS PROBLEMAS GEOMETRICOS*

En los capítulos precedentes los problemas de construcción y en general todos los problemas gráficos, se han resuelto por medio del *análisis geométrico.*

En el presente capítulo veremos que dichos problemas se pueden resolver, también, por medio del *análisis algebraico.*

En efecto, como los diversos elementos geométricos (ángulos, segmentos rectilíneos, áreas, volúmenes) se expresan por números que indican cuantas veces tales elementos contienen a la unidad respectiva, los procedimientos generales que en Algebra sirven para determinar *incógnitas,* se pueden perfectamente aplicar en geometría.

La resolución de un problema de Geometría por medio del Algebra, al igual que el método geométrico, consta de de cuatro partes: *análisis, construcción, demostración* y *discusión.*

1º El *camino a seguir* en el análisis algebraico es el siguiente:

a) Se *supone el problema resuelto,* dibujando arbitrariamente una figura más o menos aproximada a la figura que se pide.

b) *Se anotan los elementos conocidos* [1] de la figura que se trata de construir, designándolos por **a, b, c, d. . . y** se eligen una o varias *incógnitas*, que son los elementos desconocidos de la figura, cuya determinación permita resolver fácilmente el problema. Las *incógnitas* suelen denotarse por las últimas letras del alfabeto: **x, y, z.**

c) *Se plantean una o varias ecuaciones independientes* (sistema de ecuaciones), según el número de incógnitas que se elijan, relacionando las cantidades conocidas con las desconocidas.

Para el *planteamiento* de tales ecuaciones se emplean los teoremas estudiados, entre los cuales suelen usarse con mayor frecuencia, *el de Pitágoras, los de Euclides, los que se refieren al cálculo y comparación de áreas de las figuras, los referentes a líneas proporcionales en el △ y en la circunferencia, etc. . .*

d) Por último, se *resuelve la ecuación* establecida o el *sistema de ecuaciones*, siguiendo las reglas que da el Algebra. Resulta para la incógnita o para cada una de las distintas incógnitas, un valor o expresión algebraica bien determinada.

2º La *Construcción* interpreta geométricamente la expresión algebraica de la incógnita, en que remató el análisis; la construye y representa por un trazo y da término a la figura pedida.

---

(1) Por datos o elementos conocidos debe entenderse tanto los dados directamente, como los que se dan indirectamente. Entre estos últimos se hallan, por ejemplo, la distancia entre dos puntos dados, la distancia entre un punto y una recta dados. Si se da un △ ABC, se dan indirectamente sus diversos elementos. Si se da una ⨀ y un punto exterior, la tangente trazada desde el punto a la ⨀, se conoce indirectamente, etc.

3º En la *demostración* se comprueba que la figura construída cumple con las condiciones exigidas por el problema.

4º En la *discusión* se estudian los diversos casos que se pueden presentar al variar ciertos datos, las condiciones de posibilidad del problema, y el número de soluciones que puede tener. Generalmente se parte del valor o expresión encontrada para la incógnita al final del análisis.

Entre otras condiciones, para que la solución sea posible, se requiere que el valor de la incógnita sea *cantidad real*. Si fuera imaginaria o compleja, la solución sería imposible. Si el valor de la incógnita es negativa y contradice el problema, también la solución es imposible.

Si en el análisis se plantea una ecuación de primer grado, el problema tendrá una solución, y pueden tener 1 ó 2 soluciones si la ecuación es de 2º grado.

NOTA.—Lo expuesto anteriormente se aclarará con un ejemplo.

Ejemplo de resolución de un problema por el análisis algebraico.

PROBLEMA 32.—*Dado un $\triangle ABC$, trazar una transversal desde uno de sus vértices tal que, los dos $\triangle$s que resulten tengan igual perímetro.*

1º Análisis.—

Supongamos el problema resuelto.

Sea **AD** la transversal pedida. (**Fig. 294**).

$$\left.\begin{array}{l} BC=a \\ AC=b \\ AB=c \end{array}\right\} \text{datos conocidos.}$$

Para determinar **D** se necesita conocer uno de los trazos **DB** o **DC**.

Sea $DB=x$

$DC=a-x$

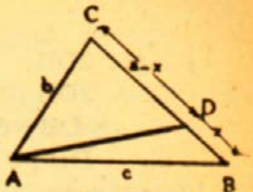


Fig. 294

Según las condiciones del problema resulta la ecuación:

$$\begin{aligned} c+x+AD &= b+(a-x)+AD \\ c+x &= b+a-x \\ 2x &= a+b-c \\ x &= \frac{a+b-c}{2} \end{aligned}$$

2º Construcción.— Se construye la expresión igual a x. (**Fig. 295**).

Se hace: $BE=a+b$

$EF=c$

Resulta: $FB=a+b-c$

Se hace:

$$DF=DB=x=\frac{a+b-c}{2}$$

$A(\leftrightarrow)D$

$AD=$ transversal pedida.

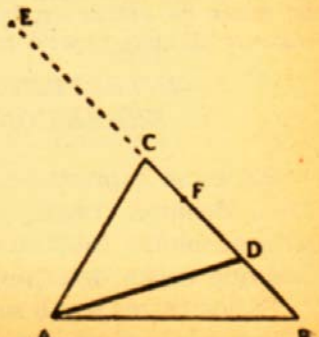


Fig. 295

3º Demostración.—$DB = x = \dfrac{a+b-c}{2}$ por construcción.

$$\begin{aligned} \text{Luego: } 2DB &= a+b-c \\ \therefore\quad 2DB+c &= b+a \\ \therefore\quad DB+c &= b+(a-DB) \\ \therefore\quad DB+c+AD &= b+CD+AD. \quad (a-DB=CD) \end{aligned}$$

La transversal AD cumple con las condiciones impuestas al problema.

4º Discusión.—En todo caso $a+b>c$.

El problema siempre es posible y tiene una solución, puesto que la transversal corta en un solo punto al lado opuesto.

NOTA.—Véanse más adelante otros ejemplos de problemas resueltos por el método del análisis algebraico, pág. 419.

OBSERVACION.—En el ejemplo precedente, el análisis remató en una expresión o valor muy sencillo para x. Su interpretación y construcción pertenece al programa de 2.º Año de Humanidades. Como en muchos casos podrían presentarse algunas dificultades en la construcción de expresiones algebraicas, antes de entrar en la resolución de problemas, conviene construir algunas expresiones fundamentales.

§ 2.—*INTERPRETACION GRAFICA DE LAS EXPRESIONES ALGEBRAICAS*

En estas expresiones, debe entenderse que **a, b, c, d, e, f**. . . denotan trazos conocidos; **m** y **n** representan números absolutos (abstractos) y **x, y, z**, son trazos desconocidos que deben determinarse.

Si dos trazos **a** y **b** se dividen, el primero por el segundo, la razón o cuociente que resulta, es un número absoluto. Si $a=40$ cm y $b=10$ cm, por ejemplo, la razón $\frac{a}{b} = 4$, sólo significa que **b** está contenido 4 veces en **a**.

Cuando una expresión representa un trazo, se dice que es una **cantidad lineal** o de **primera dimensión**.

Ejemplo: En $\mathbf{x}=\frac{\mathbf{ab}}{\mathbf{d}}$, multiplicando la igualdad por d y transformando en seguida la 2ª igualdad en proporción, resulta sucesivamente: $dx=ab$.

$$\frac{d}{a} = \frac{b}{\mathbf{x}}$$

x es un trazo que se puede construir como 4ª proporcional geométrica entre **d, a y b**.

La expresión del ejemplo es, pues, de primera dimensión.

En general, *cuando en una expresión (cociente) el número de factores del numerador excede en uno a los factores del denominador, dicha expresión representa un trazo*. Luego, es de primera dimensión.

Por ejemplo, sea la expresión: $\mathbf{x}=\frac{\mathbf{abcd}}{\mathbf{efg}}$

A la expresión se le puede dar la forma:

$$x = \frac{a}{e} \cdot \frac{b}{f} \cdot \frac{c}{g} \cdot d$$

Como $\frac{a}{e}$, $\frac{b}{f}$, $\frac{c}{g}$ son razones o números absolutos (abstractos), el trazo **d** multiplicado por el valor numérico del producto de las tres razones, representa un trazo.

La expresión que representa una área o relaciona las áreas de dos figuras, es de **segunda dimensión.**

La expresión: $x^2=ab$ representa el área de un cuadrado equivalente a un rectángulo cuyos lados son **a** y **b.**

El valor $x=\sqrt{ab}$ representa geométricamente el trazo cuyo cuadrado es equivalente al área dada. Tal trazo es la media proporcional geométrica (M. p. g.) entre **a** y **b,** puesto que la expresión se puede transformar en la proporción: $a : x = x : b$.

En general, *el cociente entre dos productos de trazos es de segunda dimensión cuando el número de factores del numerador excede en dos a los factores del denominador.*

La expresión $x^2=\dfrac{abcdf}{ghk}$ pertenece a esta clase. Puede transformarse así: $x^2=\dfrac{a}{g}\cdot\dfrac{b}{h}\cdot\dfrac{c}{k}\cdot df$.

$\dfrac{a}{g}$, $\dfrac{b}{h}$, $\dfrac{c}{k}$, como queda dicho anteriormente, son números absolutos. Su producto también es un número absoluto. La expresión **d f** es de segunda dimensión y su producto por un número absoluto, es igualmente de segunda dimensión.

Las expresiones de 3.ª, 4.ª, 5.ª dimensión, que constan de tres o más factores que representan trazos, no admiten interpretación en la Geometría plana.

Por último, téngase presente que las expresiones para que puedan tener una interpretación geométrica, es necesario que las cantidades que se comparan sean homogéneas. En otros términos deben compararse trazos con trazos y áreas con áreas.

* § 3.—CONSTRUCCIONES GRAFICAS DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Construir:

1. **$x = a+b$**. Es la suma de los dos trazos.
2. **$x = a-b$**. Es la diferencia de los dos trazos, siendo $a > b$.
3. **$x = (a+b)-(c+d)$**. Se construye $p = a+b$ y $q = c+d$.

La expresión se convierte en $x = p-q$ (Según Nº 2).
Para tener un valor positivo debe ser $(a+b)>(c+d)$.

4. **$x = a-b+c-d+f$**. Ordenando la expresión, se tiene:

$$x = (a+c+f)-(b+d).$$

Se construye: $p=a+c+f$ y $q=b+d$.
La expresión se reduce a $x=p-q$ (Nº 2).
Ha de ser $a+c+f>b+d$.

5. **$x = na$**. Como n es un número absoluto: 2, 3, 4...., se aplica el trazo **a**, sucesivamente, n veces sobre un rayo o segmento indefinido.

* 6. **$x = \dfrac{a}{n}$**. Se divide el trazo **a** en tantas partes iguales cuantas exija el valor de n. (Ver pág. 235).

* 7. **$x = \dfrac{ab}{c}$**. Se le da a la igualdad forma entera multiplicando por c y en seguida se transforma en proporción.

Resulta: $cx = ab$.

$$c : a = b : x$$

Se construye la 4ª p. g. entre **c**, **a** y **b**. (Pág. 243).

8. $\mathbf{x} = \frac{\mathbf{b^2}}{\mathbf{a}}$. Transformando se tiene:

$$ax = b^2$$

$a : b = b : x$. Se construye la **3ª p. g.** entre **a** y **b.** **(Pág. 314).**

9. $\mathbf{x} = \frac{\mathbf{abcd}}{\mathbf{efg.}}$. La expresión se puede escribir así:

$$\mathbf{x} = \frac{ab}{e} \cdot \frac{c}{f} \cdot \frac{d}{g}$$

Se hace $p = \frac{ab}{e}$. El trazo **p** se determina construyendo la **4ª p. g.** entre **e, a** y **b.** **(Pág. 243).**

La expresión queda convertida así:

$$\mathbf{x} = \frac{p \cdot c \cdot d}{f \cdot g}$$

Se hace $\mathbf{q} = \frac{p \cdot c}{f}$; $q =$ **4ª p. g.** entre **p, c** y **f.** Se construye.

Entonces $\mathbf{x} = \frac{q \cdot d}{g}$ que también se construye como **4ª p. g.**

10. $\mathbf{x} = \sqrt{\mathbf{ab}}$. Sucesivamente la igualdad se eleva al cuadrado y se transforma en proporción.

$$x^2 = ab$$

$a : x = x : b$; x se determina por la M. p. g. **(Pág. 312).**

11. $\mathbf{x} = \sqrt{\mathbf{a^2+b^2}}$. Elevando al cuadrado resulta: $x^2 = a^2+b^2$. Se cumple el teorema de Pitágoras.

x es la hipotenusa de un △ rect. de catetos **a** y **b**.

12. $\mathbf{x = \sqrt{a^2 - b^2}}$. **x es un cateto** de un △ rect. que tiene por hip. a y el otro cateto b.

También la expresión se puede escribir:

$x = \sqrt{(a+b)\ (a-b)}$. Se eleva al cuadrado.
$x^2 = (a+b)\ (a-b)$; $x =$ M. p. g. entre la suma y la diferencia de a y b.

En efecto: $(a+b) : x = x : (a-b)$

13. $\mathbf{x = \sqrt{a^2+b^2+c^2}}$. Se hace $s^2 = a^2+b^2$

$s = \sqrt{a^2+b^2}$ = hipotenusa de un △ rect. de catetos a y b (Nº 11, pág. 412).

La expresión propuesta queda así convertida en:

$x = \sqrt{s^2+c^2}$ que también es una hipotenusa de un △ rect. de catetos s y c.

14. $\mathbf{x = \sqrt{a^2+b^2-c^2}}$. Se hace $p^2 = a^2+b^2$

$p = \sqrt{a^2+b^2}$ = hipotenusa de un △ rect. de catetos **a** y **b**.

Entonces: $x = \sqrt{p^2-c^2}$ = catetos de un △ rect. que tiene hipotenusa p y por otro cateto c.

15. $\mathbf{x = \sqrt{a^2+b^2-c^2-d^2}}$.

La expresión se puede escribir:

$x = \sqrt{(a^2+b^2)-(c^2+d^2)}$.

$p^2 = a^2 + b^2$ y $q^2 = c^2 + d^2$

Se construyen **p** y **q** según número 11.

Queda $\mathbf{x} = \sqrt{p^2 - q^2} =$ **cat.** de un $\triangle$ rect. $\left\{ \begin{array}{l} \text{hip.} = p. \\ \text{cat.} = q. \end{array} \right.$

16. $\mathbf{x = \sqrt{ab \pm cd}}$.

Se hace $p^2 = ab$ y $q^2 = cd$.

o sea: $p = \sqrt{ab}$ y $q = \sqrt{cd}$.

Se construyen p y q como M. p. g. (Nº 10).

Entonces: $x = \sqrt{p^2 \pm q^2} =$ hipotenusa o cateto (Números 11 y 12).

17. $\mathbf{x = \sqrt{\dfrac{abc}{d}}}$

Se hace: $s = \dfrac{ab}{d}$

$d : a = b : s$

$s = 4^a$ p. g. entre d, a y b.

Entonces $x = \sqrt{sc} =$ M. p. g. (Nº 10).

18. $\mathbf{x = a\sqrt{2}}$... Hay varias soluciones:

1º **x**=el lado $\mathbf{l_4}$ de un cuadrado inscrito en una circunferencia de radio a.

2º $\mathbf{x} = \sqrt{2a^2} = \sqrt{a^2 + a^2} =$ **hipotenusa** de un $\triangle$ rect. isósc. de catetos iguales a **"a"**.

3º Elevando al cuadrado la expresión propuesta resulta:

$x^2 = 2a^2$.

Entonces: $\dfrac{2a}{x} = \dfrac{x}{a}$; $x =$ **M. p. g.** entre **2a** y **a.**

19. $\mathbf{x = a\sqrt{3}}$

Como en el caso anterior hay diversas soluciones:

1º $\mathbf{x}$ = **lado** $\mathbf{l_3}$ del △ equil. inscrito en un ⊙ de radio a;

2º $\mathbf{x}$ = **altura de un** △ **equil.** cuyo lado es igual a **2a**.

3º) $\mathbf{x} = \sqrt{3a^2} = \sqrt{4a^2 - a^2} =$ **cateto** de un △ rect. de $\begin{cases} \text{hip.} = 2a \\ \text{cat.} = a \end{cases}$

4º Elevando al cuadrado la expresión propuesta:

$$x^2 = 3a^2$$

$$\frac{3a}{x} = \frac{x}{a}. \quad \mathbf{x} = \mathbf{M.}\ \text{p. g. entre } \mathbf{3a} \text{ y } \mathbf{a.}$$

20. $\mathbf{x = a\sqrt{n}}$.

Esta expresión es la generalización de las propuestas en los números 18 y 19.

Introduciendo el coeficiente dentro del radical se tiene

$\mathbf{x} = \sqrt{na^2} = \sqrt{a(na)}$ siendo n un número absoluto y positivo, $\mathbf{x} =$ **M. p. g.** entre **a** y **na.**

También la expresión del Nº 20 se puede construir como hipotenusa o cateto de un △ rect. descomponiendo la cantidad subradical na^2, en una suma o diferencia de cuadrados.

Ejemplos: Si $n = 5$

$x = \sqrt{5a^2} = \sqrt{4a^2 + a^2}$ = **hipotenusa** de un $\triangle$ **rect.** de catetos 2a y a.

Si $n = 7$

$x = \sqrt{7a^2} = \sqrt{16a^2 - 9a^2}$ = **cateto de un** $\triangle$ **rect.** de hipotenusa 4a y cuyo cateto es igual a 3a.

Si $n = 14$

$$x = \sqrt{14a^2} = \sqrt{9a^2 + 4a^2 + a^2}$$

o también: $x = \sqrt{16a^2 - a^2 - a^2}$

Se construye según N.os 13 ó 14 ó 15.

En general, todo número entero se puede representar por una suma de, a lo más, cuatro cuadrados. Así:

$$23 = 9 + 9 + 4 + 1 = 3^2 + 3^2 + 2^2 + 1^2$$

EJERCICIOS DE APLICACION

Construir el valor de x en las siguientes expresiones:

56. $x = \dfrac{ab}{2c}$ **57.** $x = \dfrac{2ab}{c}$ **58.** $x = \dfrac{a^3}{bc}$

59. $x = \dfrac{ab^2}{c^2}$ **60.** $x = \dfrac{a^3}{b^2}$ **61.** $x = \dfrac{a^2 - b^2}{3c}$

62. $x = \sqrt{3ab}$ **63.** $x = \dfrac{ab}{\sqrt{cd}}$ **64.** $x = \sqrt{2a^2 - ab}$

65. $x = \sqrt{a^2 + \dfrac{bcd}{e} - \dfrac{f^2g}{h}}$ **66.** $x = a(1 + \sqrt{5})$

67. $x = a\sqrt{\dfrac{2}{3}} - b\sqrt{\dfrac{1}{2}}$ **68.** $x = \sqrt{2a^2 + 3b^2}$

69. $x=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\sqrt[4]{a^3b}$ **70.** $x=\dfrac{a^2+b^2}{c}\sqrt{5+\sqrt{7}}$

71. $x=\sqrt{\dfrac{a^2}{3}+2b^2-0{,}5c^2}$ **72.** $x=\sqrt{\dfrac{4}{3}b^2\sqrt{3}}$

73. $x=\sqrt{2c^2-ab}$ **74.** $x=\dfrac{ab-cd}{f}$ **75.** $x=\sqrt{ab+cd}$

76. $x=\sqrt[4]{a^4-b^4}$ **77.** $x=\sqrt[4]{a^4+b^4}$ **78.** $x=c(2-\sqrt{2})$

79. $x=\sqrt[4]{c^2df}$ **80.** $x=(bcdf)^{0,25}$

81. $x=\sqrt{ab+\sqrt{c^4+d^4}}$ **82.** $x=\sqrt{a\sqrt{\dfrac{2}{3}cd}}$

83. $x=\dfrac{a^2\sqrt{2+\sqrt{3}}}{b}$ **84.** $x=\dfrac{a^2+b^2}{a+b+d\sqrt{5}}$

85. Determinar gráficamente dos trazos x e y cuya diferencia sea 4 cm y su producto 12 cm².

86. Construir dos trazos cuya suma sea 3a y la media proporcional geométrica sea a.

87. Construir x en: $\dfrac{c}{b}-\dfrac{x}{a}=-\dfrac{b}{c}$

88. Construir x en: $\dfrac{\sqrt{a}}{x}=\dfrac{\sqrt{b}}{a-x}$ siendo a y b trazos dados.

89. Construir dos trazos cuya diferencia sea 2a y la media proporcional sea $a\sqrt{3}$.

90. Construir el trazo x determinado por la ecuación $x^2 = a^2\sqrt{3}$.

91. Construir el trazo determinado por la ecuación

$$x^2 = a\sqrt{b^2\sqrt{2}}$$

92. Indique la construcción del trazo determinado por la ecuación $a^3x + b^3x + c^3x + d^3x = abcd$, en que a, b, c, y d son trazos dados.

93. Construir **x** en:

$$a^{-2}x + c^{-2}x = \left[\left(\frac{a}{c}\right)^2 - \left(\frac{a}{c}\right)^{-2} \right. \cdot b^{-1}$$

94. Siendo **p** y **q** dos trazos dados, construir las raíces de la ecuación de 2º grado $x^2 - 2px + q^2 = 0$.

Solución.—Sean x' y x'' las raíces.

Se requiere:

1º Que sea $q < p$, para que las raíces no resulten imaginarias.

$$2^\circ \text{ Que sea } \left.\begin{aligned} x' + x'' &= 2p. \\ x'x'' &= q^2 \end{aligned}\right\} \begin{array}{l}\text{Propiedades de} \\ \text{las raíces de la} \\ \text{ec. de 2º grado.}\end{array}$$

Construcción.—Se describe una ⊙ de radio $OA = p$. (Fig. 296.)

Se trazan los diámetros $AB \perp CD$.

Se traza $EF \parallel AB$ (a la distancia q de AB).

Se hace $FG \perp AB$.

Las raíces gráficas de la ecuación son: $GA = x'$ y $GB = x''$.

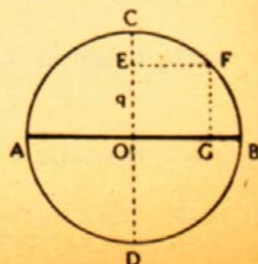


Fig. 296

Demostración.— $GA+GB=x'+x''=AB=2p.$ (Constr.)
$GA\,.\,GB=x'x''=GF^2=q^2$

66.—Construir las raíces de la ecuación de 2º grado:

$$x^2-2px-q^2=0.$$

Solución.— Sean x' y x'' las raíces. Las dos raíces son siempre reales: una positiva y otra negativa.

Debe cumplirse:

$x'+(-x'')=x'-x''=2\,p.$
$x'x''\qquad=q^2$

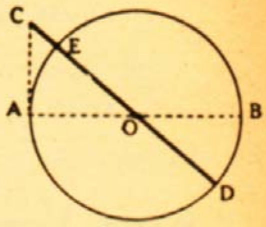


Fig. 297

Construcción.—Se describe una ⨀ de centro **O** y radio OA=**p.** (Fig. 297).

En **A** se traza la tangente **AC=q.**

Se traza la secante **COD.**

Las raíces de la ecuación, son: CD=x' y CE=x''.

Demostración.— $CD-CE=ED=2p.$
$CD\,.\,CE=AC^2=q^2.$ (Teor. LXVI, pág. 309).

PROBLEMAS PARA RESOLVER POR EL ANALISIS ALGEBRAICO (Ver ej. pág. 406).

Otros ejemplos de problemas resueltos por el análisis algebraico.

PROBLEMA 33.—*Construir un rectángulo dados la suma* **a+b=s** *de los lados contiguos y su área* **p²**.

Análisis:

Sea x el lado menor del rectángulo.
El otro lado será s—x.

Resulta la ecuación:

$$x(s-x)=p^2$$
$$sx-x^2=p^2$$
$$x^2-sx+p^2=0.$$

$$x=\frac{s}{2}\pm\sqrt{\frac{s^2}{4}-p^2}$$

Se hace: $\sqrt{\frac{s^2}{4}-p^2}=q=$cateto de un $\triangle$ rect. de hipotenusa $\frac{s}{2}$ y el otro cateto p. (Fig. 298).

Desechando el signo más que está antes del radical por no convenir a la incógnita elegida en el problema, se tiene:

$x=\frac{s}{2}-q=$lado menor del rect. pedido.

$s-x=$el lado mayor del rectángulo.

Construcción.—

$ABCD=p^2$

1º Se determina q:

$\sphericalangle DAE=90°$

$AD=p$

$DE=\frac{s}{2}$

$AE=q$

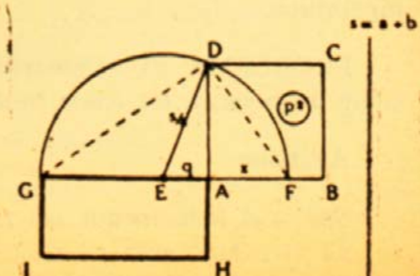


Fig. 298

$\odot\ (E, ED=\frac{s}{2})$

Resulta:

GF=s.

$AF=EF-AE=\frac{s}{2}-q=x=$lado menor del rect.

$AG=s-x=$lado mayor.

Conocidos los lados, se construye el rectángulo **IHAG.**

Demostración.— Hay que probar que $GA+AH=s$, y que el área del rect. $GH=p^2$.

1º $GA+AH=GA+AF=s$ (Constr.)

2º Area de rect. $GH=\overline{GA}\cdot\overline{AH}=(\overline{GE}+q)x.$

$$=\left(\frac{s}{2}+\sqrt{\frac{s^2}{4}-p^2}\right)\left(\frac{s}{2}-\sqrt{\frac{s^2}{4}-p^2}\right)=\frac{s^2}{4}-\frac{s^2}{4}+p^2$$
$=p^2$.

NOTA.— **También hay una demostración geométrica muy sencilla:**

Unase D con F y G.

Resulta $\triangle$ GFD rectángulo en D.

Luego: GA . AF=p^2=GA . AH (2º Teor. de Euclides, referente a la altura).

Discusión.— Para que se pueda construir el cateto $q=\sqrt{\frac{s^2}{4}-p^2}$, es necesario que sea:

$\frac{s}{2}>p$ o $s>2p$.

En la expresión $x = \frac{s}{2} \pm \sqrt{\frac{s^2}{4} - p^2}$, si se toma el valor negativo del radical, la expresión representa el lado menor AH=AF del rectángulo; si se toma el valor +, la expresión representa el lado mayor GA.

Luego, el problema tiene una solución.

PROBLEMA 34.—*Construir un rectángulo dada su área* $\mathbf{a^2}$ *y la diferencia* **d** *de sus lados contiguos.*

Análisis.—

Sea x el lado menor.
El otro lado será: $x+d$.

Resulta la ecuación:

$$x(x+d)=a^2$$
$$x^2+dx=a^2$$
$$x^2+dx-a^2=0$$

$$x = -\frac{d}{2} \pm \sqrt{\frac{d^2}{4}+a^2}$$

Se desecha el valor con signo — delante del radical por no convenir a la solución del problema.

Se hace: $\sqrt{\frac{d^2}{4} + a^2} = p =$ hipotenusa de un $\triangle$ rectángulo de catetos $\frac{d}{2}$ y a.

$$\text{Entonces } x = p - \frac{d}{2} = \text{lado menor del rect.}$$

$$x + d = \text{lado mayor del rect.}$$

Construcción.— (Fig. 299).

Para tener p, se prolonga $CB \rightarrow B$

Se hace: $BE = \dfrac{d}{2}$

$A(\leftrightarrow)E$

$AE = p.$

$$x = AF = AE - EB = p - \frac{d}{2}$$

$x + d = AI =$ lado mayor.

GHIA rect. pedido.

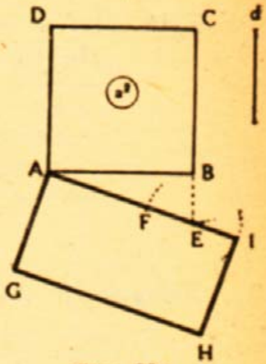


Fig. 299

NOTA.—Háganse la demostración y la discusión del problema.

PROBLEMA 35.—*En un △ dado* **ABC**, *inscribir un rectángulo de perímetro dado* **2p.** (Fig. 300).

Análisis.—

$CD = h$

$AB = c$

$HG = x$

$HE = y$

$\triangle ABC \sim \triangle HGC$

$$\text{Entonces: } \frac{h}{h-y} = \frac{c}{x} \text{ (1).}$$

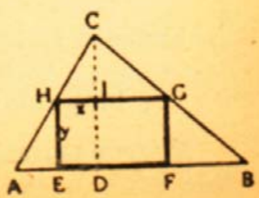


Fig. 300

$$x + y = p. \quad (2)$$

En ec. (1), $hx = ch - cy$

$$x = \frac{ch - cy}{h}$$

Este valor se substituye en (2)

$$\frac{ch - cy}{h} + y = p$$

$$ch - cy + hy = hp$$

$$(c - h)\,y = (c - p)\,h$$

$$y = \frac{(c - p)\,h}{c - h}$$

Resolviendo del mismo modo resulta:

$$x = \frac{(c - p)\,h}{c - h}$$

"y" se puede determinar como 4ª p. g. entre **(c—p)**, h y (c—h).

NOTA.—Háganse la construcción y demostración.

Discusión.—Para que **x** e **y** sean positivos, se requiere que:

$$c > h,\ c > p \text{ y } p > h$$

o bien $c > p > h$.

También se puede tener:

$$c < h,\ c < p,\ p < h$$

o bien $c < p < h$

El semi-perímetro del rectángulo debe estar comprendido entre la base **c** y su altura correspondiente **h** del $\triangle ABC$.

PROBLEMA 36.—*En el extremo de un diámetro de una ⊙ dada se dibuja una tangente; trazar desde el otro extremo del diámetro una secante hasta cortar la tangente, de modo que la parte externa comprendida entre la tangente y la ⊙, sea igual a un trazo dado* **a**.

Análisis.—

Supongamos el problema resuelto. (Fig. 301).

Designemos:

$AB=2r$

$DC=a$ (conocido)

$AD=x$

$AC=x+a$

$BC=y$

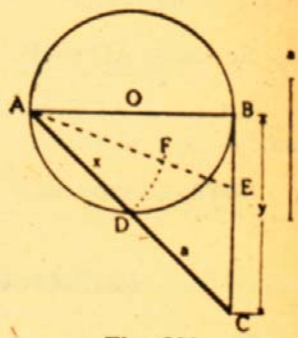


Fig. 301

Se tiene:

$y^2=(x+a)^2-4r^2$ ($\triangle$ ACB rect.)

$y^2=(x+a)a$ (Teor. LXVI)

$(x+a)^2-4r^2=(x+a)a$

$x^2+a^2+2ax-4r^2=ax+a^2$

$x^2+ax-4r^2=0.$

$$x=-\frac{a}{2}\pm\sqrt{\frac{a^2}{4}+4r^2}$$

Haciendo $\sqrt{\dfrac{a^2}{4}+4r^2}=p=$hipotenusa de un $\triangle$ rect.

de catetos $\dfrac{a}{2}$ y $2r$ y considerando sólo el signo $+$ delante del radical, resulta: $x = p - \frac{a}{2}$.

Construcción.—Se construye $\triangle$ rect. AEB con

$BE = \frac{a}{2}$ y $BA = 2r$.

$AE = p$.

Se hace: $AD = AF = p - \frac{a}{2} = x$, y se prolonga hasta C.

La recta ADC cumple con las condiciones del problema.

NOTA.—Demostrar y discutir el problema.

EJERCICIOS DE APLICACION

Resolver los siguientes problemas por el análisis algebraico:

* **95.**—Dado un **trazo a**, dividirlo en dos segmentos tales que los cuadrados construídos sobre ellos, sean entre sí como 1 : 2.

* **96.**—Dividir un trazo dado **a** en dos segmentos, de modo que el rectángulo formado por los segmentos, sea equivalente a la diferencia de los cuadrados construídos sobre ellos.

* **97.**—Construir un $\triangle$ rectángulo dados el cateto **a** y la proyección **q** del otro cateto.

* **98.**—En un cuadrado dado inscribir un $\triangle$ equilátero, de modo que las dos figuras tengan un vértice común.

* **99.**—Dado un cuadrado, trazar entre sus lados contiguos cuatro rectas de modo que el octógono que se forme sea regular.

* **100.**—En una ⊙ de radio **r**, inscribir un rectángulo cuyo perímetro sea 2s.

* **101.**—Construir un △ equilátero: a) dada la suma $a+h=s$, del lado y la altura; b) dada la diferencia $a-h=d$; c) dada el área p^2.

* **102.**—Construir un cuadrado conocida la suma **s** de la diagonal y el lado.

* **103.**—Construir un △ rectángulo isósceles de perímetro dado 2s.

* **104.**—Construir un △ rectángulo conocida la hipotenusa **c** y la razón de sus catetos $a : b=1 : 2$.

* **105.**—Construir un △ rectángulo dados los segmentos **u** y **v**, situados sobre la hipotenusa a ambos de b_γ.

* **106.** Dividir un △ dado ABC: 1º en dos partes equivalentes por medio de una recta paralela a otra recta dada L; 2º en dos partes que sean entre sí como 1:3.

* **107.**—Construir un rectángulo, dado su perímetro **2s** y equivalente a la suma de dos cuadrados dados: a^2 y b^2.

* **108.**—Dado un △ triángulo equilátero de lado **l**, transformarlo en un cuadrado.

* **109.**—Dado un △ ABC, transformarlo en un △ equilátero.

110.—Dividir un trazo dado **a** en dos segmentos tales que el rectángulo formado por dichos segmentos sea equivalente al cuadrado construído sobre la diferencia de ellos.

* **111.**—Desde un vértice de un cuadrado trazar una transversal que lo divida: 1º en la razón de 1 : 2; 2º en la razón de 2 : 3.

112.—En un △ dado ABC, inscribir un rectángulo de modo que: a) la suma de sus lados contiguos sea igual a un trazo dado s; b) la diferencia de sus lados contiguos sea igual a **d**; c) que su área sea equivalente a un cuadrado dado a^2; d) que sus lados contiguos estén en una razón dada $\frac{m}{n}$.

113.—Dividir un cuadrado dado en tres partes equivalentes. por dos $\parallel$s a una de las diagonales.

* **114.**—Dado un trapecio ABCD, dividirlo en dos partes equivalentes por medio de una paralela a las bases.

* **115.**—Dado un semi-círculo, inscribir en él un cuadrado.

* **116.**—En un cuadrado dado, inscribir otro cuya área sea c^2.

117.—Por el punto medio de una cuerda dada $AB=c$, de una ⊙, trazar otra cuerda cuyos segmentos sean entre si como 2 : 1.

* **118.**—Desde un punto situado fuera de un círculo dado, trazar una secante que resulte dimidiada por la circunferencia

* **119.**—Dado un △ ABC, dividirlo por una recta en dos partes equivalentes, de modo que una de las figuras resultantes sea un △ isósceles.

120.—Dado un △ isósceles ABC encontrar sobre la altura CD, $\perp$ a la base, un punto G de modo que GD y las $\perp$s trazadas desde G a los lados, dividan al △ en tres partes equivalentes.

* **121.**—Construir un △ dados: h_c, b_γ, c.

* **122.**—Construir un △ dados: u, v y su área$=p^2$.

* **123.**—Dado un △ ABC, dividirlo en tres partes equivalentes por medio de paralelas a uno de sus lados.

* **124.**—Dado un rectángulo ABCD, inscribir en él un rombo de modo que de los cuatro △s que se forman, dos opuestos sean isósceles.

* **125.**—En un cuadrado dado inscribir un rectángulo de área p^2.

* **126.**—En un △ equilátero dado, inscribir un cuadrado.

* **127.**—En la prolongación de un diámetro CD de un círculo dado, hallar un punto P tal que la tangente trazada desde él. sea igual al doble de la distancia PD, del punto a la circunferencia.

* **128.**—Dado un △ ABC, cortarlo por una transversal, de modo que las dos figuras que resulten, tengan igual perímetro y área.

129.—Dadas dos ⊙s concéntricas construir en el círculo mayor una cuerda, que sea igual al duplo de la cuerda interceptada por la circunferencia menor.

130.—Dividir un círculo dado en tres partes equivalentes por medio de circunferencias concéntricas.

131.—Desde un punto situado fuera de un círculo dado, trazar una secante de modo que el rectángulo formado por su parte externa y la cuerda interceptada por la ⊙, sea equivalente a un cuadrado dado a^2.

132.—Dado un punto **P** en el interior de un círculo, trazar por él una cuerda, de modo que la diferencia de sus dos segmentos sea igual a un trazo **d.**

133.—Se dan dos ⊙s tangentes exteriormente. Por el punto de tangencia trazar una secante, de modo que el rectángulo que tenga por lados las dos cuerdas, sea equivalente a un cuadrado dado $\mathbf{p}^2$.

134.—Dado un △ ABC, determinar un punto **P** sobre el lado AB, de modo que el rectángulo formado por las ⊥s trazadas desde dicho punto a los lados, sea equivalente a un cuadrado dado a^2.

135.—Inscribir un círculo en un cuadrante de otro círculo.

* **136.**—Dado un △ ABC, dividirlo en dos partes equivalentes por medio de una ⊥ a uno de sus lados.

137.—En un cuadrante, inscribir un cuadrado tal que, dos de sus vértices estén situados sobre el arco y los otros dos sobre los radios $\perp$.

* **138.—En** un $\triangle$ equilátero ABC dado, inscríbase otro $\triangle$ equilátero cuya área sea igual a la mitad del primero.

139.—Dividir un trazo de 60 cm. en media y extrema razón. (Sólo se dispone de un metro plegadizo dividido en dm., cm. y mm.)

140.—Dados un círculo y un punto P, situado fuera de él, trazar desde dicho punto una secante que corte la circunferencia en dos puntos X y Z, y de modo que PX y PZ sean catetos de un $\triangle$ rectángulo cuya hipotenusa sea el diámetro.

141.—C es el punto medio de AB. Se construyen tres semicircunferencias que tienen por diámetros AB, AC y BC, respectivamente, situadas las tres a un mismo lado de AB. Construir la circunferencia tangente a estas tres semicircunferencias.

GEOMETRIA DEL ESPACIO O ESTEREOMETRIA
PLANOS Y RECTAS EN EL ESPACIO

CAPITULO XIX

§ *1.—DEFINICIONES:*

Al indicar el objeto de la Geometría (Omer Cano, Tomo I, pág. 14), la dividimos en:

1º Geometría plana o *planimetría: estudia las figuras geométricas en un mismo plano.*

2º Geometría del espacio o *estereometría: estudia las figuras en el espacio.*

Hasta ahora nos hemos referido únicamente a la primera. En efecto, los diversos elementos geométricos de una figura (puntos, líneas, superficies, etc. . .) los hemos considerado en un solo y mismo plano.

La Geometría del espacio o estereometría estudia los cuerpos y figuras cuyos elementos geométricos no están situados en un mismo plano.

Propiedades del plano.—*Plano* es una superficie *ilimitada* tal, que contiene totalmente una recta que tiene con él dos puntos comunes.

Sus principales propiedades son:

a) Tiene sólo *dos dimensiones*: *largo y ancho*. Carece de grosor;

b) Es *ilimitado;*

c) *Toda recta* del plano lo *divide en dos semiplanos;*

d) *Todo plano divide* al espacio en dos regiones o *semi espacios* situados a distinto lado del plano;

e) Toda recta que une dos puntos situados en dos semi espacios distintos, *atraviesa* necesariamente el plano.

La noción de plano es de origen experimental. Ejemplo: un cristal, una pizarra, bien pulimentados.

Representación gráfica del plano.— Aun cuando el plano no sea una superficie *ilimitada,* para facilitar las demostraciones, por convención, se representa, como si fuera limitado, por un polígono cualquiera, por ejemplo,

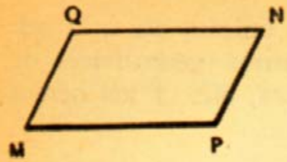


Fig. 302

un triángulo, un rectángulo, etc., con más frecuencia se representa por un paralelógramo oblicuo, o rectángulo en perspectiva. Se designa por cuatro letras mayúsculas colocadas en sus vértices, o por dos mayúsculas colocadas en dos vértices opuestos.

En Fig. 276 léase plano **MPNQ**, o plano **MN**, sencillamente.

NOTA.—En general, las figuras del espacio, aunque tengan sus puntos situados en distintos planos, se representan en el papel y en el pizarrón, por una figura plana. Los principios geométricos que hay que tomar en cuenta en su representación constituyen la teoría de la perspectiva.

§ 2.—*DETERMINACION Y GENERACION DE UN PLANO*

Elementos que determinan un plano.—Un plano queda determinado:

1º Por una *recta* y un *punto* exterior a esta recta.
2º Por *dos rectas* que se *cortan*.
3º Por *dos* rectas *paralelas*.
4º Por *tres puntos* no situados en línea recta.

Por una recta pueden pasar infinidad de planos. Dicho de otro modo, una recta no fija la posición de un plano. Ejemplo: las diferentes páginas de un libro que se abre.

Generación de un plano.—Un plano puede considerarse engendrado por una recta que se mueve:

1º Resbalando *sobre dos rectas paralelas;*

2º Resbalando *sobre dos rectas que se cortan;*

3º Resbalando *sobre una recta fija,* de tal modo que *siempre* permanezca *paralela a sí misma;*

4º Resbalando *sobre una recta fija* y de modo que uno de sus puntos *coincida* en todo momento con un *punto fijo;*

5º Girando *en torno de una recta fija* y de modo que la recta que gira permanezca constantemente perpendicular a la recta fija en un punto fijo de ella. Ejemplos: un rayo de una rueda que gira en torno del eje; el canto inferior de una puerta de un cuarto, que gira en torno de la arista que lleva las bisagras, genera el plano del piso.

§ 3.—POSICIONES RELATIVAS DE RECTAS Y PLANOS

Una recta y un plano pueden tener las siguientes posiciones:

1º **Coincidir.**—Esta coincidencia se cumple si la recta y el plano tiene por lo menos dos puntos comunes. La recta **AB** coincide con el plano **PQ**, o dicho en otros términos, se halla situada sobre él. (Fig. 303).

Toda recta situada sobre un plano lo divide en dos partes llamadas *semiplanos.*

2° La recta puede **cortar** o perforar al plano. Ambos tienen un punto común.

En Fig. 303 **RI** corta perpendicularmente al plano y **CD** lo corta oblicuamente.

El punto **E** en que **CD** perfora o penetra en el plano, es el *pie* de la recta CD en el plano o su *punto de penetración*. Lo mismo se debe decir del punto O.

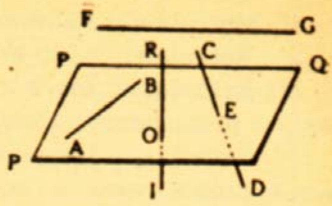


Fig. 303

> *Una recta es ⊥ a un plano cuando es ⊥ a todas las rectas trazadas por su pie en dicho plano.*

En caso contrario es *oblicua.*

3° La recta puede ser **paralela** al plano, cuando no tienen ningún punto común con él. FG||PQ. (**Fig. 303**).

§ 4.—*POSICIONES RELATIVAS DE DOS RECTAS EN EL ESPACIO*

En el espacio, dos rectas pueden tener las siguientes posiciones:

1° **Coincidir.**—Ocurre siempre que tengan por lo menos dos puntos comunes.

2° **Cortarse.**—En esta posición tienen un punto común. Se pueden cortar *perpendicularmente* u *oblicuamente.*

3º Pueden ser **paralelas.** En este caso no tienen ningún punto común y forman un plano bien determinado.

> Para que *dos rectas*, en el espacio, *sean paralelas* se requiere que, a la vez: a) *no tengan ningún punto común;* b) *que pertenezcan a un mismo plano.*

4º Pueden **cruzarse.** Tampoco tienen en esta situación ningún punto común, pero, además, ambas rectas no pertenecen a un mismo plano.

§ 5.—*POSICION RELATIVA DE DOS PLANOS*

Dos planos pueden:

1º **Ser paralelos.**—No tienen ningún punto común. Ejemplo: el cielo raso y el piso de una sala.

2º **Cortarse.**—Este caso se cumple si los dos planos tienen por lo menos dos puntos comunes. Planos MN y PQ. (Fig. 304).

Los dos planos se pueden cortar *perpendicularmente* u *oblicuamente*.

Los planos se cortan según una recta que se halla situada a la vez en cada uno de ellos. Esta recta, común a los planos, **AB** en Fig. 304, es su *intersección* o *arista*.

Arista es la intersección de dos planos.

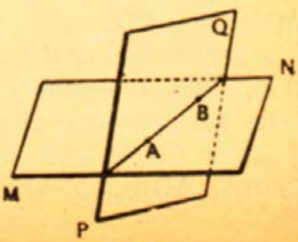


Fig. 304

3º **Coincidir.**—En este caso los planos tienen por lo menos tres puntos comunes. En consecuencia tienen entonces todos sus puntos comunes.

§ *6.—RECTAS Y PLANOS PARALELOS*

¿Qué se entiende por rectas paralelas en el espacio?
¿Cuándo una recta es || a un plano, en el espacio?

TEOREMA LXXXI.—**Por un punto dado, del espacio, se puede trazar una sola paralela a una recta dada.**

Demostración.—La recta y el punto determinan un plano único y, en este plano, según el postulado de Euclides, se puede trazar una sola || a la recta dada.

TEOREMA LXXXII.—**Si una recta es paralela a otra recta situada en un plano, es también paralela a dicho plano.**

Hip.) AB || CD (**Fig. 305**).
Tes.) AB || MN

Dem.) Siendo **AB** || **CD**, determinan el plano **CB**, que cortan **MN** según **CD**.

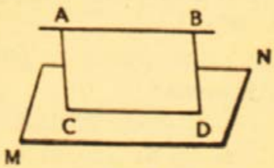


Fig. 305

Si se supone que **AB** no es paralela a **MN**, lo cortará. Pero como **AB** pertenece al plano **CB**, cortaría también a la intersección **CD**, lo cual contradice la hipótesis.

Luego **AB** no puede cortar al plano **MN**. Luego **AB**||**MN.**

TEOREMA LXXXIII.—(Recíproco del LXXXII).—**Si por una recta AB, paralela a un plano MN se hace pasar un plano cualquiera de modo que corte al primero, resulta que la recta AB es || a la intersección de los dos planos.**

Hip.) AB || MN. (Fig. 305).

Tes.) AB || CD.

Dem.) **AB** no puede cruzarse con **CD** por pertenecer al mismo plano **CB**. Tampoco puede cortarse con **CD**, porque cortaría al plano **MN**, contradiciendo la hipótesis. Luego si **AB** no puede cruzarse ni cortarse con **CD**, tiene que ser paralela.

TEOREMA LXXXIV.— **Si dos planos paralelos son cortados por un tercer plano, las intersecciones son paralelas.** (Fig. 306).

Hip.): $\begin{cases} \text{MN} \parallel \text{JR} \\ \text{QP corta MN y JR} \end{cases}$

Tes.): AB || CD

Dem.): AB y CD no pueden cruzarse por estar situadas en el mismo plano **QP**.

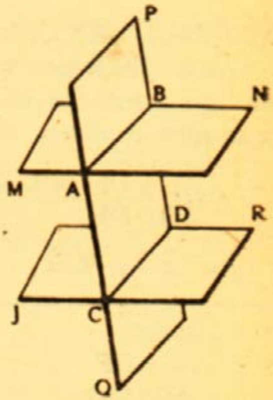


Fig. 306

Tampoco pueden cortarse por hallarse situadas en planos paralelos.

Luego: AB || CD.

Ejemplo: la pared de una sala de clase corta al cielo y al piso según dos rectas paralelas.

TEOREMA LXXXV.—**Los segmentos de rectas paralelas interceptados por planos paralelos, son iguales.**

Hip.) $\begin{cases} MN \parallel JR \text{ (Fig. 306).} \\ AQ \parallel PD \end{cases}$

Tes.) AC=BD

Dem.) AB y CD determinan el plano **QP**, que corta a los planos **MN** y **JR** según las rectas **AB** y **CD.**

Pero, AB || CD. Luego **ACDB** es un paralelógramo.

Luego: AC=BD.

TEOREMA LXXXVI.—**Dos ángulos situados en distintos planos que tienen sus lados respectivamente paralelos, son iguales si son de la misma naturaleza, es decir, ambos agudos, o ambos obtusos.**

Hip.): $\begin{cases} AC \parallel DF \text{ (Fig. 307).} \\ AB \parallel DE \end{cases}$

Tes.): $\sphericalangle CAB = \sphericalangle FDE$

Dem.): Se hace:

AC=DF

y AB=DE

Siendo AC#DF, el cuadril. **FDAC** es un #.

Por lo tanto AD#CF.

También **EDAB** es un #.

Por lo tanto AD#BE.

Resulta entonces que CF#BE (Axioma: 2 cantidades...) y BC=EF.

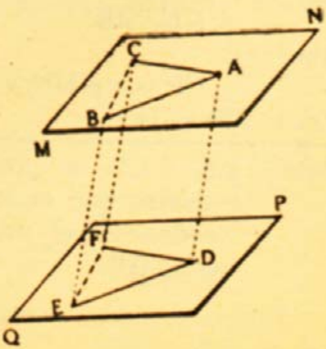


Fig. 307

Luego: $\triangle BAC \cong \triangle EDF$ (Tres lados iguales)
Luego: $\sphericalangle CAB = \sphericalangle FDE$. (Q. E. D.)

NOTA.—Si los lados AB y DE fueran del mismo sentido y los lados AC y DF de sentidos contrarios, los ángulos serían suplementarios. (El uno agudo y el otro obtuso).

§ 7.—*RECTAS Y PLANOS PERPENDICULARES*

¿Cuándo se dice que una recta es $\perp$ a un plano?

TEOREMA LXXXVII.—**Una recta que corta a un plano, y es perpendicular a otras dos trazadas por su pie, en dicho plano, es perpendicular a cualquier otra recta del plano que sea trazada por su pie.** (Fig. 308).

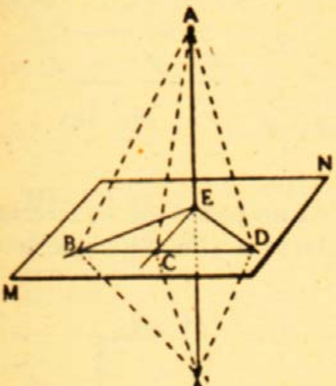


Fig. 308

Hip.): $AE \perp EB$; $AE \perp ED$
Tes.): $AE \perp EC$

Dem.): Se prolonga $AE \rightarrow E$.
Se hace: $AE = EA'$

Se traza en el plano MN, la recta BD de modo que corte a las rectas EB, EC y ED.

Se unen A y A' con los puntos B, C y D.

Resulta: $\begin{cases} AB = A'B \\ AD = A'D \end{cases}$ (Por ser oblicuas que se apartan igualmente del pie de la $\perp$).

Entonces: $\triangle ABD \cong \triangle A'BD$ (Por tener los tres lados =s)

De esta congruencia se desprende:

$$\sphericalangle ABD = \sphericalangle A'BD.$$

Por tanto: $\triangle ABC \cong \triangle A'BC$ (Tienen dos lados y el ángulo comprendido iguales).

Resulta así: $CA = CA'$.

Entonces: $\triangle ACA'$ isósceles.

Luego: $CE \perp$ **AA'** (Teor. "La recta que une el vértice con el punto medio de la base de un $\triangle$ isósceles es $\perp$ a ella").

o sea: $AE \perp EC$. (Q. E. D.)

COROLARIO.—*Para que una recta sea $\perp$ a un plano, basta que lo sea a dos rectas que pasan por su pie en dicho plano.*

OBSERVACION.—En la práctica para trazar perpendiculares a un plano, se emplea la escuadra de tres ramas. Cada rama es perpendicular al plano de las otras dos. (Fig. 309).

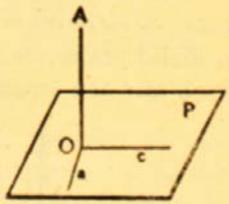


Fig. 309

TEOREMA LXXXVIII.—**Si en un punto de una recta se trazan tres o más perpendiculares a ella, todas se hallan situadas en un mismo plano.**

Hip.): $EP \perp PA$; $EP \perp PB$; $EP \perp PD$. (Fig. 309-a).

Tes.): PA, PB, PD están situadas en QH.

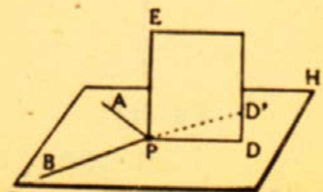


Fig. 309 a

Dem.): **EP** es $\perp$ al plano **QH** determinado por las rectas PA y PB. (Corol. de Teor. LXXXVII, pág. 439).

Supóngase que **PD** no está situada en el plano **QH**.

Tomaría entonces una posición cualquiera **PD'**, fuera de él, pero situada en el mismo plano determinado por **EP** y PD.

Este plano ED' cortaría al plano **QH** según una recta PD, distinta de PD'.

Resultaría así el absurdo que en el mismo plano **ED**, habría dos perpendiculares en P a la recta EP que serían PD' y PD. (1). Este absurdo provendría de suponer que **PD** está situada fuera del plano **QH**.

Luego **PD** se halla situada en **QH**. (Q. E. D.)

COROLARIOS.—1º *Por un punto de una recta se puede trazar un solo plano ⊥ a ella.*

2º *Por un punto situado fuera de una recta, se puede trazar un solo plano ⊥ a ella.*

3º *En un punto de un plano, no se puede trazar más que una sola ⊥ a dicho plano.*

Hip.): $\overline{PH} \perp MN$. (Fig. 310).

Tes.): $\overline{PH}$ única ⊥.

Dem.): Supóngase que también $\overline{PI} \perp MN$. $\overline{PH}$ y $\overline{PI}$ determinan un plano que cortaría al MN según $\overline{EF}$.

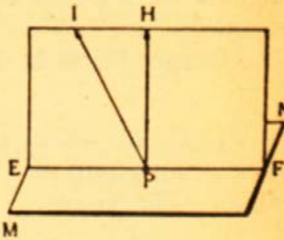


Fig. 310

---

(1) PD'⊥EP por hipótesis por ser simplemente la dirección que tomaría PD, fuera del plano QP.

PD⊥EP, porque siendo PD intersección del plano ED' con QH, pertenece también a este último plano. Además, EP⊥OH. Luego EP es ⊥ a todas las rectas del plano QH que pasan por P.

Resultaría entonces el absurdo que en el mismo plano EFHI habría dos perpendiculares en P a la recta EF. Luego PH es la única ⊥ al plano MN.

4º *Por un punto fuera de un plano no se puede trazar más que una sola perpendicular a dicho plano.* (Fig. 311).

Hip.): $\overline{PA} \perp MN$.

Tes.): $\overline{PA}$ única ⊥.

Dem.): Supóngase que se pueda trazar otra ⊥ $\overline{PB}$ a MN.

PA y $\overline{PB}$ determinan un plano que cortaría a MN según DC. En el plano **DABP** habría dos ⊥s desde P a la misma recta DC, lo cual es un absurdo.

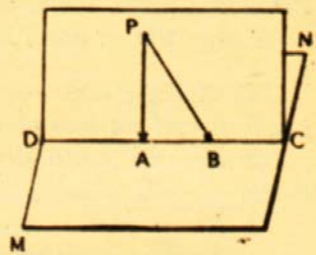


Fig. 311

Luego: PA es la única ⊥ a MN.

L. G. 25.—*El L. G. de todas las ⊥s a una recta, trazadas en un punto de ella, es el plano perpendicular a la recta en dicho punto.*

TEOREMA LXXXIX.—(De las tres perpendiculares).—**Si una recta AP es ⊥ a un plano MN, y si desde el pie de esta perpendicular, se traza otra perpendicular PE a una recta cualquiera CD del plano, la recta AE que une un punto arbitrario A de AP con el punto E, es perpendicular a CD.** (Fig. 312).

Hip.): **AP⊥MN; PE⊥CD** (Fig. 312).

Tes.): AE⊥CD.

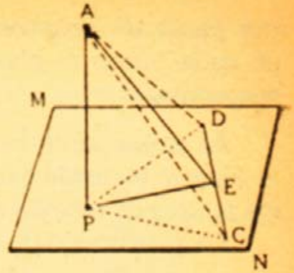


Fig. 312

Dem.): Se hace EC=ED.

C(↔)P (↔)D

Resulta: PC=PD (PE es simetral de CD).

C(↔)A (↔)D.

Resulta △APC≅△ADP (Tiene 2 lados y el ∢ comp. iguales).

De donde: AC=AD.

Entonces △ACD isósceles, siendo E punto medio de su base CD.

Luego: AE⊥CD. (Q. E. D.)

COROLARIO.—*PE, PC y PD son las proyecciones de las oblicuas AE, AC y AD sobre el plano.*

Proyección ortogonal en un plano.— *Proyección ortogonal de un punto en un plano, es el pie de la perpendicular bajada desde el punto al plano.*

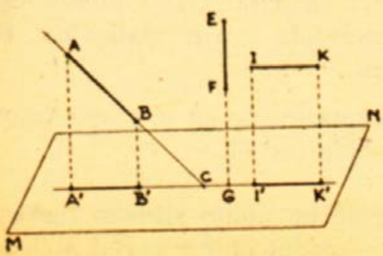


Fig. 313

Así, las proyecciones de los puntos A, B y C en el plano MN (Fig. 313), son los puntos A', B' y C.

En el plano MN en el cual se proyecta, se llama *plano de proyección* y los segmentos perpendiculares de cada punto al plano, se llaman *proyectantes* del punto respectivo.

La proyección de una figura cualquiera en un plano, es la figura formada por el conjunto de las proyecciones de los puntos de aquélla en el plano.

La proyección de un punto es otro punto.

La proyección ortogonal de un trozo en un plano, es el trazo que une los pies de las $\perp$ *trazadas a dicho plano desde los extremos del trazo.* Así, la proyección del trazo AB, Fig. 313, es el trazo A'B'.

La proyección de un trazo $\perp$ al plano de proyección se reduce a un punto. La proyección del trazo EF es el punto G. (Fig. 313).

La proyección de un trazo $\parallel$ al plano de proyección es otro trazo $\parallel$ a aquel e igual a él. Ej.: La proyección del trazo IK es I'K'.

Si uno de los extremos del trazo coincide con el plano de proyección, la proyección de dicho trazo se obtiene uniendo la proyección de otro extremo, con el punto de intersección del extremo coincidente con el plano. Ej.: B'C es la proyección del trazo BC.

Si el trazo está situado totalmente en el plano de proyección, su proyección coincide con él.

TEOREMA XC.—**Si desde un punto situado fuera de un plano, se trazan a él la perpendicular y varias oblicuas:**

1º **La perpendicular es menor que cualquiera oblicua.**

2º **Las oblicuas que tienen iguales proyecciones son iguales.**

3º **La oblicua de mayor proyección es también la mayor.**

1ª Hip.) AP⊥MN. (Fig 314).

Tes.) AP<AC.

Dem.) AP y AC determinan el plano PF y en el △APC situado en dicho plano AP<AC.

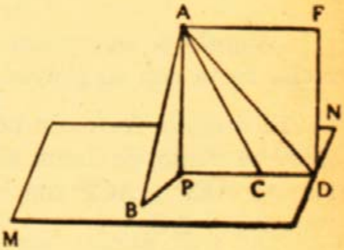


Fig. 314

2º Hip.) AP⊥MN;
PB=PC.

Tes.) AB=AC.

Dem.) △APB≅△APC.
Luego: AB=AC.

3º Hip.) AP⊥MN; PD>PC.

Tes.) AD>AC.

Dem.) En el △ACD.
el ∢ACD>90º.
∴△ACD es obtusángulo en C.
Luego: AD>AC.

COROLARIO.—*La recta más corta de un punto del espacio a un plano, es la perpendicular a este plano.*

Llámase **distancia de un punto a un plano** la ⊥ trazada desde dicho punto al plano.

L. G. 26.—*El L. G. de los puntos de un plano que se encuentran a la distancia* **a** *de un punto dado P, en el espacio, es la ⊙ que tiene por centro el pie de la ⊥ trazada desde el punto P al plano y cuyo radio es* $\sqrt{\mathbf{a}^2 - \perp^2}$.

Angulo de una recta con un plano es el ∢ que forma dicha recta con su proyección en el plano.

El ángulo formado por una oblicua y su proyección sobre el plano, se llama *ángulo de inclinación*. En Fig. 312 los ∢s AEP y ACP son los ∢s de inclinación de las oblicuas AE y AC.

Como se demostrará a continuación, el ángulo de inclinación es el menor de los ángulos que la oblicua puede formar con cada una de las rectas del plano que pasan por su pie.

TEOREMA XCI.—**El ángulo de inclinación es el menor ángulo que una oblicua forma con el plano.**

Hip.: Sea el plano QP y $\overline{AB}$ una oblicua que lo corta. (Fig. 315).

$\overline{AC} \perp QP$ determina ángulo de inclinación ABC.

Tes.): ∢ABC < ∢ABI

Dem.): Se hace BD=BC

A(↔)D

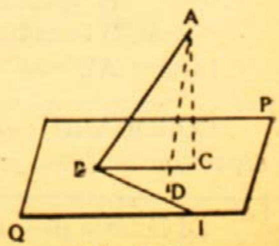


Fig. 315

Los $\triangle$s ABC y ABD tienen:

$AB = AB$ (lado común)

$BC = BD$ (Construc.)

$AC < AD$ (La $\perp$ es menor que la oblicua. Teor. XC, corol. 1º).

Luego: $\sphericalangle ABC < \sphericalangle ABI$ (En virtud del Teor.: "Dos $\triangle$s que tienen 2 lados=s y el 3º desigual, al menor lado se opone menor ángulo. Teor. 35º, Tomo 3.er. Año de O. Cano).

TEOREMA XCII.—**Dos o más rectas $\perp$s a un mismo plano, son paralelas entre sí.**

Hip.) AB y CD $\perp$s MN. (Fig. 316).

Tes.) $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$.

Dem.) (B↔)D.

Se traza $FG \perp BD$ en el plano MN.

A(↔)D (A=punto cualquiera de AB).

$AD \perp FG$ (Teor. LXXXIX)

También $CD \perp FG$ (Por Hip.)

∴ DC, DA y DB son $\perp$s a FG en el punto D y se hallan situadas en un mismo plano BC (Teors. LXXXVIII y LXXXIX).

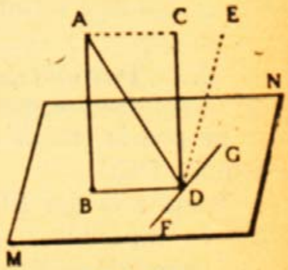


Fig. 316

Además AB tiene dos puntos en el plano BC.

Resulta entonces que AB y CD pertenecen a un mismo plano BC, en el cual, ambas rectas son $\perp$s a BD.

Luego: AB $\parallel$ CD (En virtud del teorema de Geometría plana: "Dos o más $\perp$s a una misma recta son $\parallel$s entre sí").

TEOREMA XCIII.—(Recíproco del Teor. XCII).—**Si dos rectas del espacio son $\parallel$s y una de ellas es $\perp$ a un plano, la otra también lo es.**

Hip.) AB $\parallel$ CD; AB$\perp$MN. (Fig. 316).
Tes.) CD$\perp$MN.

1ª Dem.) B($\leftrightarrow$)D.
Se traza FG$\perp$BD por D en el plano MN.
A($\leftrightarrow$)D (A = punto cualquiera de AB).
Resulta AD$\perp$FG (Teor. (Teor. LXXXIX).
$\therefore$ FG$\perp$ plano BC, determinado por DA y DB.
También FG$\perp$DC puesto que DC pertenece al plano BC.
Luego: siendo CD$\perp$ a las rectas FG y BD del plano MN es $\perp$ a este último plano.

2.a Demostración del Teorema XCIII.— (Indirecta). Supóngase que CD no fuera $\perp$ a MN. (Fig. 316).

Se podría trazar entonces por D la perpendicular, por ejemplo, DE.

Resultaría así ED paralela a AB, distinta de CD, lo cual es imposible.

Luego AB $\parallel$ CD.

TEOREMA XCIV.—**Dos planos perpendiculares a una misma recta, son paralelos.** (Fig. 317).

Hip.) MQ y NQ⊥AB
Tes.) MQ || NQ

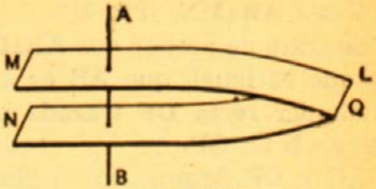


Fig. 317

1ª Dem.) Los planos **QM** y **NQ** no pueden coincidir según la hipótesis.

Luego: o bien se cortan o son paralelos.

Supóngase que dichos planos se cortaran. Su intersección sería una recta **LQ**.

Resultaría así que por un punto **Q** de su intersección se podrían trazar dos planos ⊥s a la recta **AB;** lo cual es imposible según el corolario 1º del teorema LXXXVIII.

Luego: **MQ || NQ.**

2.a Demostración del Teorema XCIV.—

Si los planos MQ y NQ se cortasen, su intersección sería una recta LQ. (**Fig. 317**).

Si se une un punto O de LQ con A y B, resultaría el △OAB y los ∢s OAB y OBA, rectos, por hipótesis; lo cual es imposible, porque un triángulo no puede tener dos ∢s rectos.

Luego: MQ || NQ.

TEOREMA XCV.—(Recíproco del Teor. XCIV).—**Si dos planos son paralelos, toda recta perpendicular a uno de ellos, lo es también al otro.**

Dem.) Sean **MN** y **QP** los dos planos ||s.

Y sea **AB⊥MN.** (Fig. 318).

Se trata de probar que **AB⊥QP** lo que es igual, que AB es ⊥ a cualquier recta **DF** trazada por su pie **D** en QP.

AB y DF determinan el plano CF que corta al plano **MN** según una recta **CE.**

Resulta: CE||DF. (Teorema LXXXIII).

La recta AB⊥CE (Hipótesis).

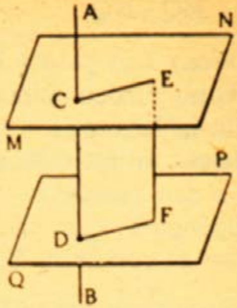


Fig. 318

También AB⊥DF (puesto que CE || DF)

El mismo razonamiento se puede repetir para cualquiera otra recta que pase por **D** en el plano **QP**.

Luego: **AB⊥QP** (Teorema LXXXVII).

COROLARIO.—*Dos rectas ||s a una tercera en el espacio, son ||s entre sí.*

DEFINICION.—Por distancia entre dos planos ||s debe entenderse la parte de la perpendicular comprendida entre ambos planos.

CD o EF representa la distancia entre los planos MN y QP. (Fig. 318).

PROBLEMA 37.—*Desde un punto situado fuera de un plano, trazar la ⊥ a dicho plano.*

1.ª Solución.— (Fig. 319).

Sea **MN** el plano y **P** el punto.

Se marcan tres puntos en el plano MN a una misma distancia **a** de **P**: A, B y C.

Se construye una ⊙ que pase por los tres puntos.

El centro de la ⊙ es el pie de la ⊥ pedida.

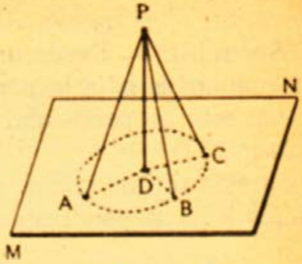


Fig. 319

2.a Solución (Fig. 320).

Sea **MN** el plano y **P** el punto.

Se traza una recta cualquiera **BC** en **MN**.

BC y P determinan el plano **BG**.

En este plano se hace:

PD⊥BC

y ED⊥BC (en el plano MN).

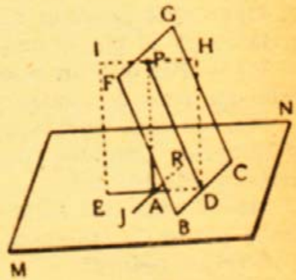


Fig. 320

En el plano **DI** determinado por PD y DE, se traza PA⊥DE. PA es la perpendicular pedida.

Dem.) En (MN) se traza:

JR ∥ BC.

Se sabe que: BC⊥DP y DE (construc.)

entonces BC⊥ plano PDE (Corol. Teor. LXXXVII).

∴ AJ⊥PDE (Teor. XCIII).

∴ AJ⊥PA.

Por ser PA⊥DE y PA⊥RJ, PA⊥MN.

PROBLEMA 38.—*En un punto situado sobre un plano levantar la perpendicular a él.*

Solución.— Desde un punto cualquiera situado fuera del plano, se baja la perpendicular. (**Problema 37**).

Por esta perpendicular y el punto dado se hace pasar un plano.

En este último plano, y por el punto dado, se traza la paralela a la perpendicular anterior.

EJERCICIOS DE APLICACION

142.—¿Qué posición tienen el piso y el cielo raso de la sala de clase? ¿Y el piso y una muralla?

143.—¿Por qué un piso de tres patas queda mejor en equilibrio que otro de cuatro patas?

144.—Si una puerta gira en torno de la arista que tiene las bisagras. ¿cuántos puntos deben afirmarse para que la puerta quede inmóvil?

145.—Dadas tres rectas OA, OB y OC que concurren, en un mismo punto O. ¿Cuántos planos determinan si están situados en distintos planos?

146.—¿Cuántas perpendiculares se pueden trazar en el espacio en un punto de una recta L? ¿Dónde se hallan situadas?

147.—Dos rectas perpendiculares a una tercera, en el espacio, ¿son forzosamente paralelas?

148.—¿Podrían ser perpendiculares a un mismo plano, dos rectas que se cruzan?

* **149.**—¿Cuál es el L. G. de los puntos equidistantes de dos puntos dados, en el espacio?

150.—Dados en el espacio una recta L y dos puntos fuera de ella (determinar en la recta un punto que equidiste de los dos puntos dados.

* **151.**—Dado un plano y un punto A fuera de él, indicar cuál es el L. G. de las rectas paralelas al plano que pasan por el punto A.

• **152.—Determinar el L. G. de los puntos equidistantes de dos planos dados: a) los planos son paralelos; b) los planos se** cortan.

• **153.—Determinar el L. G. de los puntos que equidistan de tres puntos dados en el espacio A, B y C.**

• **154.—¿Cuál es la L. G. de los puntos de un plano que equidistan de dos puntos dados A y B situados fuera de él?**

155.—Dado un triángulo rectángulo isósceles tal que CA= CB=10 cm, se levanta CP=10 cm perpendicular al plano del triángulo. Calcular AB, PA, PB. ¿De qué naturaleza es el △ PAB?

156.—En el vértice C del ángulo recto de un triángulo rectángulo ABC, se levanta la perpendicular al plano del triángulo. Siendo M un punto variable de esta perpendicular, mostrar que los △s MCA y MCB son △s rectángulos. ¿A qué condición será equilátero el triángulo MAB?

157.—Una sala rectangular mide 6,40 de largo y 4,80 m de ancho. En el piso, a tres de los ángulos de la sala se fija un cordel de 5 m de largo. Los extremos libres de estos cordeles queden tirantes. Precisar este punto y calcular la altura de la sala.

158.—Dado un triángulo equilátero ABC de lado a, desde un punto P, exterior al plano del triángulo y situado a una distancia l de cada uno de los tres vértices, se baja la perpendicular al plano ABC. Precisar la posición del pie de esta perpendicular y calcular su longitud PH. ¿Con qué condición ha de cumplir l para que sea posible el problema?

159.—Dados dos puntos A y B en el espacio, por el punto medio O del segmento AB, se traza el plano P perpendicular a AB. 1º Mostrar que cualquier punto M de este plano equidista de A y B. 2º Mostrar que cualquier punto M, equidistante de A y B está en el plano P. De este estudio deducir una proposición general.

160.—¿Cuál es el lugar de los pies de las perpendiculares bajadas desde un punto A a un plano que gira alrededor de una recta?

161.—Dado un punto O situado a una distancia d de un plano dado P ¿cuál es el lugar geométrico de los puntos de este plano situado a una distancia l del punto O? (Discutir según los valores de l).

162.—Trazar por un punto dado P un plano paralelo a dos rectas que se cruzan L y L'.

163.—Las distancias de los puntos A y B a un plano son 14 y 29, respectivamente. Si la distancia entre los pies de las perpendiculares trazadas desde los puntos A y B al plano es 20 ¿cuál es la distancia entre los dos puntos?

* **164.**—Determinar el L. G. de todos los puntos que están a una distancia dada **a** de un plano dado.

165.—Demostrar que dos planos $\|$s a un tercero son $\|$s entre sí.

166.—Demostrar que si entre tres planos $\|$s se trazan dos rectas cualesquiera, los segmentos de las rectas que interceptan los planos, son proporcionales.

CAPITULO XX

ANGULOS DIEDROS Y POLIEDROS

§ *1.—ANGULOS DIEDROS*

Llámase *ángulo diedro* a la abertura comprendida entre dos planos que se cortan.

Los planos que forman el diedro se llaman *caras.*

La intersección de dos caras se llama *arista.*

El ángulo diedro se designa por las dos letras de la arista o bien por cuatro letras: las dos de la arista y una de cada cara. Las de la arista se leen entre las otras dos.

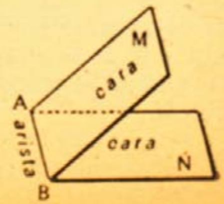


Fig. 321

Ej.: Diedro AB o diedro MABN. (Fig. 321).

Un ángulo diedro se genera por la rotación de un plano en torno de una recta situada sobre él.

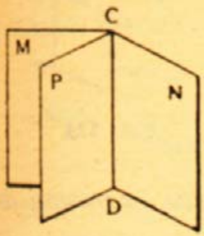


Fig. 322

La *magnitud* del diedro depende de este giro o sea de la mayor o menor abertura entre sus caras.

Se llaman diedros adyacentes dos diedros que tienen una arista y un plano común.

Ej.: los diedros MCDP y PCDN son adyacentes. (Fig. 322).

Dos *diedros* son *iguales* cuando sobrepuestos coinciden.

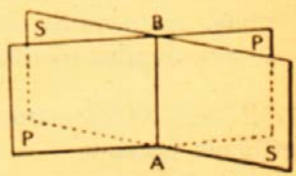


Fig. 323

En la figura 322 el diedro MCDN es igual a la suma de los diedros MCDP y NCDP.

Los diedros, también, pueden restarse, duplicarse, triplicarse, etc., y dividirse en partes iguales.

Plano bisector de un diedro es el plano que lo divide en dos diedros iguales.

En la Fig. 324, HI⊥AB y HG⊥AB.

El ∢ IHG que resulta, se llama *ángulo plano o rectilíneo* de diedro EABC.

Llámase ángulo plano o rectilíneo correspondiente a un diedro al ángulo formado por dos perpendiculares trazadas a la arista en un punto cualquiera de ella y situadas una en cada plano del diedro.

Los ángulos rectilíneos correspondientes a un mismo diedro, son todos iguales. (Teor. XCVI).

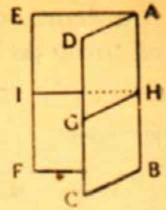


Fig. 324

La medida de un ángulo diedro es, pues, la misma de su ángulo rectilíneo.

El ángulo diedro será recto, agudo u obtuso si su ángulo rectilíneo es recto, agudo u obtuso.

También, *la razón de dos ángulos diedros* es la misma que la de sus ángulos rectilíneos.

TEOREMA XCVI.—**Dos diedros iguales, tienen ángulos rectilíneos iguales.**

Hip.) diedro AB=diedro A'B' (**Fig. 325**).

Tes.) $\sphericalangle$EAC=$\sphericalangle$E'A'C'

Dem.) Se sobrepone el diedro AB sobre su igual A' B' de modo que la arista AB coincida con A' B' y el punto C con C'.

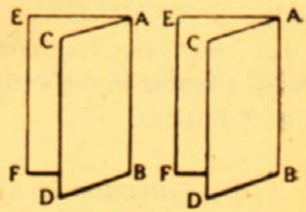


Fig. 325.

Las rectas AE y A'E' coinciden por estar en un mismo plano y ser perpendiculares a A'B' en un mismo punto.

Lo mismo AC con A'C'.

Luego: $\sphericalangle$EAC=$\sphericalangle$E'A'C'.

OBSERVACION.—Enúnciese y demuéstrese la proposición recíproca al teorema **XCVI**.

TEOREMA XCVII.—**Dos ángulos diedros son proporcionales a sus ángulos rectilíneos respectivos.**

Tes.) $$\frac{\text{Diedro CBAE}}{\text{Diedro C'B'A'E'}} = \frac{\sphericalangle \text{EAD}}{\sphericalangle \text{E'A'D'}} \quad \text{(Fig. 326)}.$$

Dem.) Supóngase que los dos diedros tengan como común medida un diedro δ y que esta común medida esté contenida **m** veces en el diedro **CBAE** y **n** veces en **C'B'A'E'**.

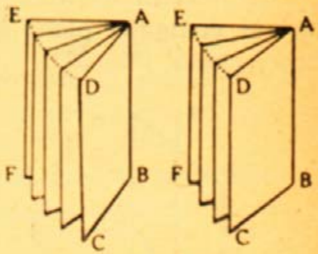


Fig. 326

Resulta:

$$\text{diedro } \quad \text{CBAE} = m\delta$$
$$\text{diedro } \quad \text{C'B'A'E'} = n\delta$$

Dividiendo miembro a miembro se tiene:

$$\frac{\text{Diedro CBAE}}{\text{Diedro C'B'A'E'}} = \frac{m}{n}$$

Al dividir los diedros en m y n partes iguales, los $\sphericalangle$s rectilíneos quedan igualmente divididos en m y n partes iguales.

Supóngase que un ángulo α sea la común medida de los dos ángulos rectilíneos, resulta:

$$\left.\begin{aligned} \sphericalangle \text{EAD} &= m\alpha \\ \sphericalangle \text{E'A'D'} &= n\alpha \end{aligned}\right\} \text{Luego: } \frac{\sphericalangle \text{EAD}}{\sphericalangle \text{E'A'D'}} = \frac{m}{n}$$

Comparando las dos prop. cuyo 2º miembro es la razón $\frac{m}{n}$

se tiene: $\frac{\text{Diedro CBAE}}{\text{Diedro C'B'A'E'}} = \frac{\sphericalangle EAD}{\sphericalangle E'A'D'}$ (Q. E. D.)

Planos perpendiculares.— *Dos planos son perpendiculares cuando forman un diedro recto*, (su ángulo rectilíneo mide 90°).

TEOREMA XCVIII.—**Si una recta y un plano son ⊥s entre sí, cualquier plano que pasa por dicha recta es ⊥ al primer plano.** (Fig. 327).

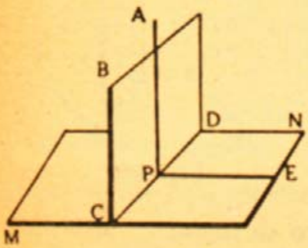


Fig. 327

Hip.) AP⊥MN.
Tes.) BD⊥MN.

Dem.) En MN se traza PE⊥CD (por P).

El ∢ APE, rectilíneo del diedro BCDN = 90°.

Si el ∢ rectilíneo es recto, lo será el diedro.

Luego BD⊥MN.

COROLARIO.—*Si dos planos que se cortan son perpendiculares a un tercero, su intersección es también perpendicular a este tercer plano.* (Fig. 328).

Ej.: La arista común a dos murallas de la sala de clase, es ⊥ al piso.

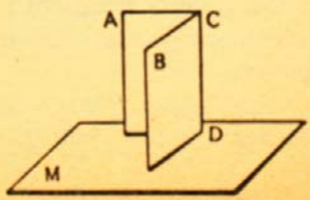


Fig. 328

§ 2.—*ANGULOS POLIEDROS*

Llámase ángulo poliedro o sólido la figura formada por varios ángulos planos que tienen un mismo vértice y dos a dos un lado común.

En la figura 329, **S-ABCDE** es un ∢ poliedro. (Se lee primero la letra del vértice).

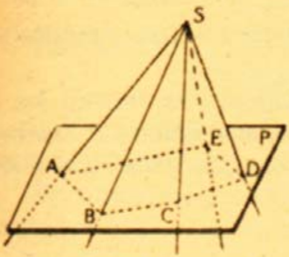


Fig. 329

La abertura formada en la cúspide de una pirámide, es un ejemplo de ∢ poliedro o sólido.

El punto común **S**, en que concurren los planos, se llama *vértice* del ángulo sólido o poliedro. (Fig. 329).

Cada uno de los planos que forman el ángulo poliedro, se llama cara. En la figura 329, **ASB, BSC**... son caras.

Las intersecciones de las caras, son las *aristas*. Las aristas deben considerarse prolongadas indefinidamente.

Prácticamente se suponen cortadas por un plano.

Se dice que *un ángulo poliedro es convexo cuando al cortar sus aristas por un plano, la sección que resulta es un polígono convexo.* (Véanse Figs. 329 y 330).

También se puede afirmar y definir que:

Todo ángulo poliedro es la figura engendrada por el movimiento de una recta en torno del perímetro de un polígono, permaneciendo fija en uno de sus puntos, situado fuera del plano de dicho polígono.

La magnitud de un ángulo poliedro no depende de la extensión de sus caras, sino de la *abertura* de ellas.

El ángulo poliedro formado por tres caras se llama *ángulo triedro*.

Ej.: Dos murallas que se cortan y el techo de la sala de clase, forman un ángulo triedro.

El ángulo *triedro* que tiene dos ángulos planos iguales es *isósceles*.

El *triedro es equilátero*, si tiene sus tres ángulos planos iguales.

Dos ángulos poliedros son congruentes cuando los ángulos diedros y rectilíneos del uno, son iguales a los ángulos diedros y rectilíneos del otro, considerados en el mismo orden.

TEOREMA XCIX.— **En todo ángulo triedro un ángulo plano (cara) cualquiera es menor que la suma de los otros dos, y mayor que su diferencia.**

Hip.) Sea el triedro S y sus ángulos planos BSC=a, CSA=b y ASB=c (Fig. 330).

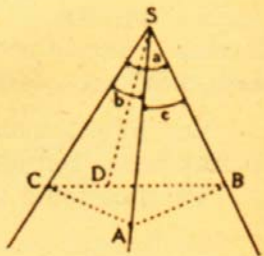


Fig. 330

Tes.) $\begin{cases} 1^\circ: \; a<b+c \\ 2^\circ: \; b>a-c \end{cases}$

Dem.) 1º La tesis sería evidente si uno de los sumandos del 2º miembro fuera igual o mayor que ∡ BSC=a (1.er miembro).

Por tal motivo supóngase ∡ BSC mayor que cada uno de los otros dos ángulos planos.

Se hace: $\measuredangle BSD = \measuredangle BSA = c$. (**Sobre el plano BSC**).
y $SA = SD$ (**magnitud arbitraria**)

Se traza BC de modo que pase por D. (**En el plano BSC**)
$B(\leftrightarrow)A\ (\leftrightarrow)C$

Resulta $\triangle BSA \cong \triangle BSD$ (**Dos lados y el $\measuredangle$ comprendido iguales**).

Por lo tanto $BA = BD$.

También en el plano CAB se tiene:

$$BC < BA + AC.$$

Quitando BD del 1.er miembro y su igual BA del 2º, resulta: $DC < AC$.

Entonces los $\triangle$s CSD y CSA tienen dos lados respectivamente iguales y el tercero desigual, siendo $CD < CA$.

Luego $\measuredangle CSD < \measuredangle CSA$. (**Teorema 35 del 3.er Año**).

Agregando al 1.er miembro de la última desig. el $\measuredangle DSB$ y al 2º m. su igual $\measuredangle ASB$, resulta:

$$\measuredangle BSC < \measuredangle CSA + \measuredangle ASB \text{ o } a < b + c.$$

2º La desigualdad precedente se puede escribir:
$b + c > a.$

Se resta de ambos miembros c y queda:
$b > a - c.$ (**Q. E. D.**)

TEOREMA C.— **La suma de los ángulos planos de cualquier ángulo poliedro convexo es menor que 4 R.**

Sea $S =$ suma de los $\measuredangle$s planos del $\measuredangle$ poliedro. (**Fig. 331**).

Tes.) $S < 4R$.

Dem.) Se corta el $\sphericalangle$ poliedro por un plano arbitrario ABCD que determina sobre las aristas los puntos A, B, C, D:

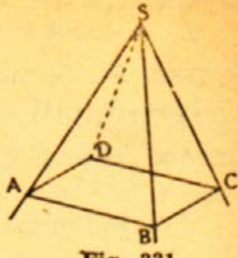


Fig. 331

En cada uno de los vértices A, B, C y D, se forma un ángulo triedro.

Según Teorema XCIX, se tiene:

$$\begin{aligned}
&\sphericalangle DAB < \sphericalangle SAD + \sphericalangle SAB\\
&\sphericalangle ABC < \sphericalangle SBA + \sphericalangle SBC\\
&\sphericalangle BCD < \sphericalangle SCB + \sphericalangle SCD\\
&\sphericalangle CDA < \sphericalangle SDC + \sphericalangle SDA
\end{aligned}$$

Sumando miembro a m., estas desigualdades resulta:

$$\sphericalangle s\ DAB+ABC+BCD+CDA < \sphericalangle s\ SAD+SAB+SBA+SBC+SCB+SCD+SDC+SDA.$$

El 1.er m. de la desig. representa la suma de los $\sphericalangle$s interiores del polígono convexo.

$ABCD = 2nR - 4R$ (Fórmula de la suma de los $\sphericalangle$s int. de un polígono de n lados).

El 2º miembro de la desigualdad es igual a la suma de los ángulos en la base de los n $\triangle$s de las caras laterales que designamos por Σ_b.

Entonces: $2nR - 4R < \Sigma_b$ (1)

También: $2nR = \Sigma_b + S$ (2) (Se resta desigualdad 1 de igualdad 2).

$\therefore \quad 4R > S$

Lo que es lo mismo: $S < 4R$.

EJERCICIOS DE APLICACION

167.—¿Cuál es el L. G. de los puntos del espacio que equidistan de las caras de un diedro?

168.—Dado un triángulo ABC, se pasa por cada uno de los vértices un plano perpendicular al lado opuesto. Mostrar que los tres planos así determinados tienen una recta común y que esta recta es perpendicular al plano ABC.

169.—Un segmento AB penetra en O en un plano P. Se proyectan A y B en a y b sobre el plano P. Sabiendo que AB= 1 m, Aa=20 cm, Bb=30 cm, calcular las longitudes ab, AO, OB y el ángulo de la recta AB con el plano P.

170.—Siendo MABN, NABP y PABM tres diedros consecutivos iguales de misma arista AB ¿cuál es el valor de cada uno?

171.—Comparar los diedros formados por dos planos paralelos cortados por un tercer plano.

172.—Mostrar que dos rectas trazadas a un plano desde un mismo punto fuera de él y que forman con él ángulos iguales, son iguales entre sí y recíprocamente.

173.—Desde un punto situado fuera de un plano se traza a este plano una oblicua de longitud a y que forma con él un ángulo de 30º; ¿cuál es la distancia del punto al plano?

174.—Construir un plano perpendicular a un plano dado M y que pase: 1º por una recta situada en el plano M; 2º por una recta paralela a M; 3º por una recta oblicua a M.

175.—En el centro O de la circunferencia circunscrita a un triángulo equilátero ABC de lado a, se levanta la perpendicular OS al plano ABC. Se une un punto S de esta perpendicular con los vértices A, B, C.

1º Mostrar que son iguales las caras del triedro de vértice S

2º Determinar la posición de S para que este triedro sea trirectángulo.

3º Determinar la posición de S para que el triedro S tenga por caras tres triángulos equiláteros.

176.—Dado un triedro tri-rectángulo OABC, se toman en las aristas longitudes iguales OA=OB=OC=a. Mostrar que el triángulo ABC es equilátero. Se proyecta O en el plano ABC; determinar la posición del pie de la proyectante y calcular la longitud de ésta.

177.—En las aristas de un triedro tri-rectángulo, se toman tres cualesquiera longitudes OA, OB, OC. Se traza la altura AH del triángulo ABC, se une O con H y se proyecta O en O' del plano ABC.

1º Mostrar que OH es perpendicular a BC.

2º Mostrar que el punto O' se halla sobre la recta AH.

3º Mostrar que O' es el punto de concurrencia de las alturas del triángulo ABC.

177'.—Demuestre que: Si una recta y un plano son $\perp$s a otro plano, o son $\parallel$s entre sí, o la recta está en el plano.

CAPITULO XXI

CUERPOS GEOMETRICOS. SUS PROPIEDADES Y ELEMENTOS PRINCIPALES

Se dividen en $\begin{cases} \textit{Cuerpos poliedros}\text{: caras planas} \\ \text{y} \\ \textit{Cuerpos redondos}\text{: caras curvas.} \end{cases}$

I.—CUERPOS POLIEDROS

§ *1.—DEFINICIONES Y DIVISION GENERAL*

Llámase cuerpo poliedro un sólido limitado completamente por porciones de planos.

En un poliedro se pueden considerar:

Las *caras* que son los polígonos planos de que se compone la superficie del poliedro. Ej.: AA'B'B (Fig. 332).

Las *aristas* que son las intersecciones de las caras.

Los *vértices* que son las intersecciones de tres o más aristas.

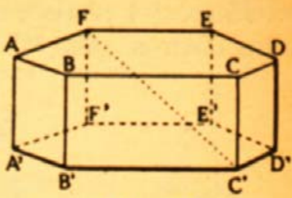


Fig. 332

Los *ángulos diedros* y *poliedros*.

Las *diagonales* que son las rectas que unen dos vértices no situados en una misma cara. Ej.: FC' (Fig. 332).

Se dice que *un poliedro es convexo, si todas sus secciones planas de él son polígonos convexos*.

Los poliedros se designan según el número de sus caras, por: tetraedro si tiene 4 caras.

pentaedro	"	" 5	"
hexaedro	"	" 6	"
heptaedro	"	" 7	"
octaedro	"	" 8	"
decaedro	"	" 10	"
dodecaedro	"	" 12	"
icosaedro	"	" 20	" etc...

Los poliedros se dividen en *regulares e irregulares*.

a) POLIEDROS REGULARES.—*Son aquellos cuyas caras son polígonos regulares congruentes entre sí y cuyos ángulos poliedros son iguales.*

Son cinco poliedros regulares convexos:

1º El *tetraedro regular,* que tiene 4 caras que son △s equiláteros; 4 vértices o ángulos triedros y 6 aristas o ángulos diedros. (Fig. 333).

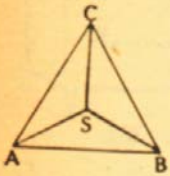


Fig. 333

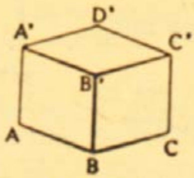


Fig. 334

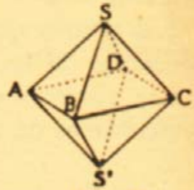


Fig. 335

2º El *hexaedro regular* o *cubo* que tiene:
6 caras cuadradas;
8 vértices o ángulos triedros;
12 aristas o ángulos diedros, y
4 diagonales iguales y concurrentes. (Fig. 334).

3º El *octaedro regular* que tiene:
8 caras que son △s equiláteros;
6 vértices o ángulos tetraedros;
12 aristas o ángulos diedros.

Está formado por dos pirámides cuadrangulares opuestas por su base común **ABCD**. (Fig. 335).

4º El *dodecaedro* regular que tiene:
12 caras pentagonales;
20 vértices o ángulos poliedros, y
30 aristas.

5º El *icosaedro regular* que tiene:
20 caras que son △s equiláteros;
12 vértices o ángulos pentaedros; y
30 aristas.

b) POLIEDROS IRREGULARES.—*Son los que no cumplen con algunas de las condiciones del poliedro regular.*

Tienen diversas formas.

Se pueden clasificar en dos grupos principales: *prismas y pirámides.*

§ 2.—*DEL PRISMA*

Se llama *superficie prismática a la engendrada por una recta que se desplaza paralelamente a sí misma, siguiendo el perímetro de un polígono plano.*

Si la superficie prismática se corta por dos planos paralelos, resulta un *prisma.*

Prisma es un poliedro comprendido entre dos polígonos congruentes y paralelos y cuyas caras laterales son paralelógramos.

Los dos polígonos congruentes y paralelos son las *bases del prisma.* (Fig. 336).

Es muy fácil demostrar que las bases son congruentes.

En efecto, tienen sus lados respectivamente iguales, dos a dos, por ser lados opuestos de #s. Además sus ∢s son iguales por tener sus lados respectivamente ||s en el espacio y ser ∢s de misma naturaleza. (Teor. LXXXVI).

El nombre del prisma depende del polígono basal.

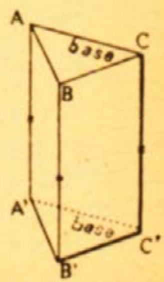


Fig. 336

Si la base es un triángulo, se tendrá un *prisma triangular.* (Fig. 336).

Será *prisma cuadrangular, pentagonal, hexagonal, etc*., según que la base sea un cuadrilátero, un pentágono, un hexágono, etc.

El prisma puede *ser recto* u *oblicuo,* según que las aristas laterales sean o no perpendiculares a las bases. (Fig. 337).

Cualquier sección plana paralela a las bases de un prisma, es un polígono congruente con ellas. (¿Por qué?)

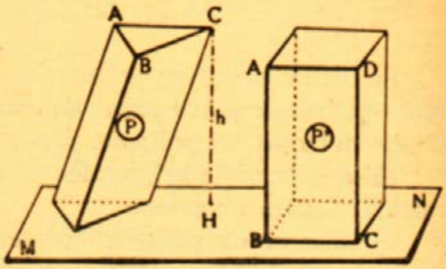


Fig. 337

Los planos AB', BC', CA', (Fig. 336), son las *caras laterales. Todas las aristas laterales de un prisma son iguales entre sí*, por ser segmentos paralelos comprendidos entre planos paralelos que determinan trazos paralelos.

En Fig. 336 AA'=BB'=CC'.

Sección recta de un prisma es la que es perpendicular a las aristas laterales.

Todas las secciones rectas de un prisma son congruentes.

En la Fig. 338 **EMFN** es una sección recta de un prisma oblicuo.

Altura de un prisma es la perpendicular entre las dos bases.

En un prisma recto cada arista lateral es igual a la altura.

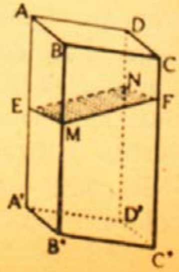


Fig. 338

El prisma cuyas bases son paralelógramos, recibe el nombre de paralelepípedo.

Todas sus caras son #s.

En un paralelepípedo las caras opuestas son congruentes y paralelas. (Demuéstrese).

Prisma regular es un prisma recto que tiene por bases un polígono regular.

Prisma truncado o tronco de prisma es la parte de un prisma comprendida entre una de las bases y una sección plana que, sin ser paralela a la base, corta todas las aristas. Ej.: el prisma **E M F N—A B C D** en Fig. 338.

§ 3.—*POLIEDROS CONGRUENTES Y EQUIVALENTES*

Dos cuerpos poliedros son congruentes cuando pueden coincidir.

En este caso los cuerpos tienen misma forma y mismo volumen.

Dos poliedros son equivalentes cuando tienen el mismo volumen pero sin tener necesariamente la misma forma.

TEOREMA CI.—**Dos prisma rectos de igual base y altura, son congruentes.**

Hip.) $B=B'$; $h=h'$ (Fig. 339).

Tes.) $P \cong P'$

Dem.) Se sobrepone el prisma **P** sobre el prisma **P'** de modo que coincidan las bases congruentes **B y B'**.

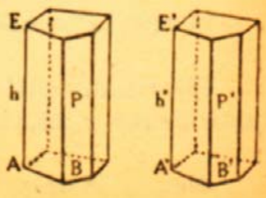


Fig. 339

Las aristas **AE** y **A'E'** coinciden por ser perpendiculares iguales trazadas de un mismo punto a un plano.

Lo mismo sucede con las otras aristas laterales.

Así las bases superiores coinciden y como consecuencia, también coinciden los prismas. Luego son congruentes.

TEOREMA CII.—**Un prisma oblicuo, es equivalente a un prisma recto que tiene por altura la arista lateral del prisma oblicuo y por base una sección recta del mismo.**

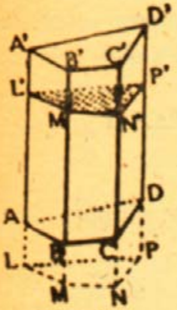


Fig. 340

Tes.) LP'=AD'

Dem.) Sea AD' un prisma oblicuo. (Fig. 340).

LP=sec. recta del prisma oblicuo.

LP'=prisma recto cuya altura LL' =arista lat. **AA'** del prisma oblicuo.

Para demostrar que **AD'=LP'** basta probar la igualdad de los troncos de prismas **LD** y **L'D'** que son exteriores a la parte común **AP'**.

Ahora bien, estos troncos de prismas rectos tienen: bases LMNP≅L'M'N'P' y aristas LA=L'A'; MB=M'B', por ser diferencias de longitudes iguales.

Se pueden, por lo tanto, sobreponer y hacer que coincidan. Entonces: LD≅L'D' y LD+AP'=L'D'+AP'.

Luego: LP'=AD'.

TEOREMA CIII.—**Dos prismas cualesquiera de bases equivalentes y alturas iguales, son equivalentes.**

Dem.) Se aplica el principio de Cavalieri que figura inmediatamente más abajo.

§ 4.—*PRINCIPIO DE CAVALIERI (Postulatum de Cavalieri)*

Si entre dos rectas paralelas L y L' Fig. 341, se disponen dos series de rectángulos de misma altura y tales que los rectángulos que se hallan enfrente uno del otro tengan

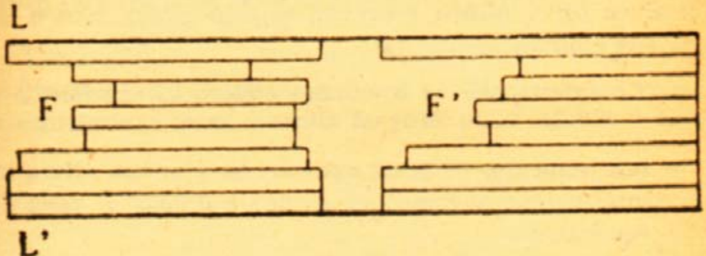


Fig. 341

la misma base, es evidente que las dos figuras formadas F y F' son equivalentes puesto que una y otra constan del mismo número de rectángulos respectivamente congruentes. Subsiste la igualdad por mínima que sea la altura.

Si entre dos planos paralelos se colocan uno encima de otro prisma o cilindros de base plana de modo que los sólidos situados a la misma distancia de uno de los planos ten-

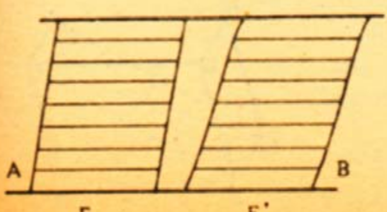


Fig. 342

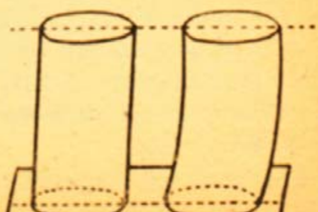


Fig. 343

gan misma altura y bases equivalentes, los dos cuerpos formados son equivalentes por ser sumas del mismo número de sólidos respectivamente equivalentes. (Figs. 342 y 343).

Haciéndose infinitamente más y más pequeña la altura o espesor de las láminas equivalentes siempre subsiste la equivalencia de los volúmenes. En otros términos, se puede enunciar que *"Dos o más cuerpos tienen igual volumen si en igual altura sobre un mismo plano, tienen sus secciones equivalentes"*. Así:

a) Un prisma oblicuo o cilindro oblicuo es equivalente al prisma o cilindro recto de igual altura y bases equivalentes.

b) Dos tetraedros de bases equivalentes y misma altura son equivalentes porque se componen de una infinidad de secciones planas equivalentes.

c) Una pirámide recta y otra oblicua o un cono recto y otro oblicuo de igual altura y bases equivalentes, tienen igual volumen, etc...

TEOREMA CIV.—**Las diagonales de un paralelepípedo se cortan en su punto medio.** (Fig. 344).

Dem.) Dos aristas opuestas, por ejemplo, EA y GC, son paralelas y determinan un plano.

El cuadrilátero ACGE es un #. (Tiene un par de lados iguales y ||s: EA # GC).

Entonces las diagonales GA y CE se cortan en su punto medio O.

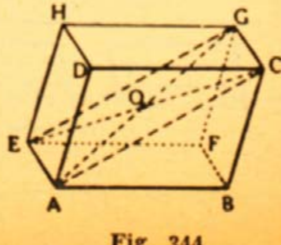


Fig. 344

Si se consideran las diagonales **HB** y **GA,** también concurren en **O,** puesto que el punto medio **O de GA** es siempre el mismo.

La diagonal **DF** también concurre en **O** por las razones anteriores.

Luego la tesis es verdadera.

El punto medio **O** de las diagonales es el centro de la figura de este paralelepído y centro de simetría.

TEOREMA CV.—**En un paralelepípedo rectángulo el cuadrado de una diagonal es igual a la suma de los cuadrados de las tres dimensiones.** (Fig. 345).

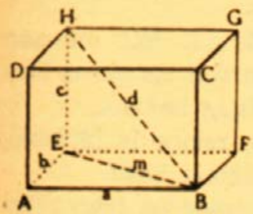


Fig. 345

Hip.) d=diagonal; a, b, c, dimensiones.

Tes.) $d^2=a^2+b^2+c^2$.

Dem.) El $\triangle BEH$ rectángulo en E, da:

$d^2=m^2+c^2$.

El $\triangle ABE$ rectáng. en A, da: $m^2=a^2+b^2$.

Luego: $d^2=a^2+b^2+c^2$ (Reemplazando m^2 por su valor).

Caso particular.—En el cubo: $d^2=3a^2$

$$\text{o } d=a\sqrt{3}$$

§ 5.—*LA PIRAMIDE*

Se llama superficie pirámidal, la engendrada por una recta que pasando constantemente por un punto fijo, resbala siguiendo el perímetro de un polígono plano.

La recta móvil se llama *generatriz;* la línea poligonal recibe el nombre de *directriz* y el punto fijo o director, se llama *vértice.*

Pirámide es un poliedro que tiene por base un polígono cualquiera y cuyas caras laterales son triángulos que tienen un vértice común.

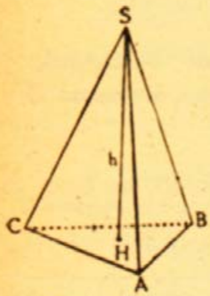


Fig. 346

El punto de concurrencia S de las caras laterales, es la *cúspide* de la pirámide. (Fig. 346).

El polígono ABC es la base.

El △ ABS es una cara lateral.

Las rectas AS, BS, CS, intersecciones de las caras laterales, son las aristas laterales.

Las rectas AB, AC, BC, intersecciones de la base con las caras laterales son las aristas basales.

El nombre que recibe la pirámide depende del polígono basal.

Si la base es un *triángulo,* la pirámide es *triangular.* Si es un *cuadrilátero,* es *cuadrangular,* etc...

Altura de una pirámide, es la perpendicular trazada desde la cúspide al plano de la base.

La recta SH es la altura. (Fig. 347).

Se dice que *una pirámide es recta cuando el pie de la altura equidista de todos los vértices basales.*

En ella las aristas laterales son iguales entre sí. (Demuéstrese).

Una pirámide es oblicua, cuando el pie de la altura desequidista de los vértices basales.

Pirámide regular es la pirámide recta cuya base es un polígono regular. En ella el pie de la altura coincide con el centro del polígono basal. (Fig. 347).

En una pirámide regular, las caras laterales son triángulos isósceles congruentes. ¿Por qué?

Apotema lateral de una pirámide regular, es la altura de las caras laterales. **SM** es una apotema lateral. (Fig. 347).

Apotema basal de una pirámide es la apotema del polígono basal. **MH** es una apotema basal. (Fig. 347).

HA, HB..., etc., son radios del polígono basal.

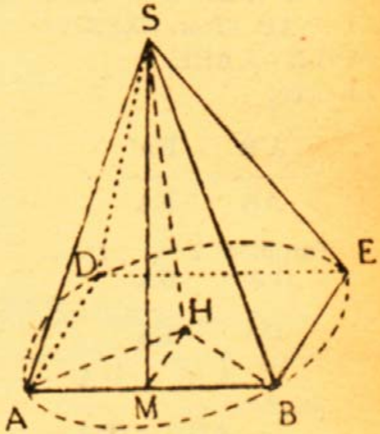


Fig. 347

Las apotemas laterales de una pirámide recta regular, son iguales. (¿Por qué?)

TEOREMA CVI.—**Si una pirámide se corta por una sección plana paralela a la base, dicha sección es un polígono semejante a la base.**

Sea A'B'C'D' la sección plana y ABCD la base. (Fig. 348).

Hip.) A'B'C'D' $\parallel$ ABCD.
Tes.) A'B'C'D'$\sim$ABCD.

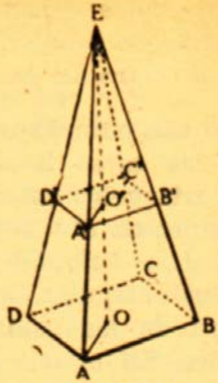


Fig. 348

Dem.) Se debe comprobar que los lados homólogos de ambos polígonos son proporcionales y los ∢s homólogos son iguales.

Siendo A'B'C'D' $\parallel$ ABCD resulta:
A'B' $\parallel$ AB (Teor. LXXXIV).
$\triangle A'B'E \sim \triangle ABE$
Entonces:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{EA'}{EA}\ .$$

También: D'A' $\parallel$ DA

$$y \quad \frac{D'A'}{DA} = \frac{EA'}{EA} \quad (\triangle D'A'E \sim \triangle DAE)$$

$$\text{Luego: } \frac{A'B'}{AB} = \frac{D'A'}{DA}$$

De la misma manera se puede probar que los demás lados homólogos de los dos polígonos son proporcionales.

También se tiene:

∢ D'A'B' = ∢ DAB (Teor. LXXXVI).
∢ C'D'A' = ∢ CDA, etc...

Luego $A'B'C'D' \sim ABCD$

COROLARIOS.—*Si una pirámide se corta por un plano paralelo a la base, resulta que:*

1º Las aristas laterales y la altura quedan divididos en partes proporcionales.

2º Los lados homólogos de dos secciones planas paralelas a la base, son proporcionales a las distancias de dichas secciones a la cúspide.

Para su demostración se considera

$$\triangle EA'O' \sim \triangle EAO. \text{ (Fig. 348).}$$

Entonces:

$$\frac{EO'}{EO} = \frac{EA'}{EA}$$

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{EA'}{EA}$$

Luego: $$\frac{A'B'}{AB} = \frac{EO'}{EO}$$

3º Las áreas de dos secciones planas paralelas a la base, son proporcionales a los cuadrados de sus distancias a la cúspide.

Demostración.— $A'B'C'D' : ABCD = \overline{A'B'}^2 : \overline{AB}^2$
(Las secciones son semejantes).

Pero $$\overline{EO'} : \overline{EO} = \overline{A'B'} : \overline{AB}$$
(Corolario anterior)

$$\therefore \overline{EO'}^2 : \overline{EO}^2 = \overline{A'B'}^2 : \overline{AB}^2$$

Luego $$A'B'C'D' : ABCD = EO'^2 : EO^2$$

TEOREMA CVII.—**Si dos pirámides de bases equivalentes y de alturas iguales, se cortan por planos paralelos a las bases, y a igual distancia de las cúspides, las secciones que resultan son, también, equivalentes.**

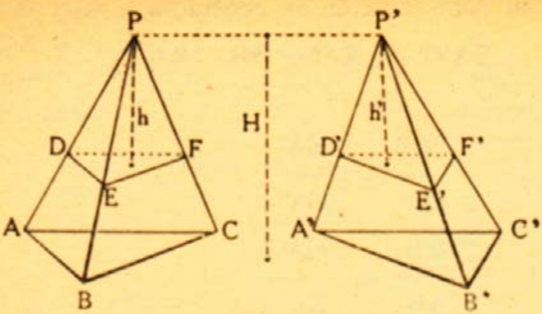


Fig. 349

Hip.) $\begin{cases} ABC = A'B'C' & \textbf{(Fig. 349).} \\ H = \text{altura común; } h = h' \end{cases}$

Tes.) $DEF = D'E'F'$

Dem.): $\dfrac{ABC}{DEF} = \dfrac{H^2}{h^2}$ (Teor. CVI — Cor. 3º)

$$\frac{A'B'C'}{D'E'F'} = \frac{H^2}{h^2}$$

Luego: $\dfrac{ABC}{DEF} = \dfrac{A'B'C'}{D'E'F'}$

Pero en esta última proporción los antecedentes son iguales, también, deben serlo los consecuentes.

Luego: $DEF = D'E'F'$.

TEOREMA CVIII.—**Dos o más pirámides de bases equivalentes y de alturas iguales, son equivalentes.**

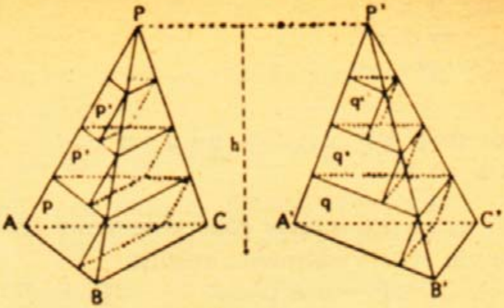


Fig. 350

Dem.): Sean P—ABC y P'—**A'B'C'** las pirámides. (Fig. 350).

Se suponen colocadas las bases de ambos poliedros, sobre un mismo plano y dividida su altura **h** en un número cualquiera **n** de partes iguales.

Por los puntos de división se trazan planos paralelos a las bases de ambos sólidos.

Las secciones correspondientes en ambas pirámides, de cada uno de estos planos, serán equivalentes. (Teorema CVII...)

Ahora se consideran estas secciones como bases de prismas internos, construídos paralelamente a las aristas **PA** y **P'A'**; estos prismas serán respectivamente equivalentes, por serlo sus bases y tener igual altura $\frac{h}{n}$. (Teor. CIII)

Si se designan por **p**, **p'**, **p''**,... los volúmenes de los prismas inscritos en **P—ABC** y por Σ su suma.

Los volúmenes de los prismas inscritos en **P'—A'B'C'**, se designan por q, q', q'',... y por Σ' su suma.

Se tiene: $p = q$

$p' = q'$

$p'' = q''$

. . . .

Luego: $p+p'+p''+\ldots = q+q'+q''+\ldots$

o sea $\Sigma = \Sigma'$.

Siendo estas dos sumas constantemente iguales, cuando n aumenta indefinidamente resulta:

$$P—ABC=P'—A'B'C'\ldots \qquad \text{(Q. E. D.)}$$

§ 6.—*TRONCO DE PIRAMIDE*

Tronco de pirámide o pirámide truncada es la parte de una pirámide comprendida entre la base y una sección plana paralela a ella.

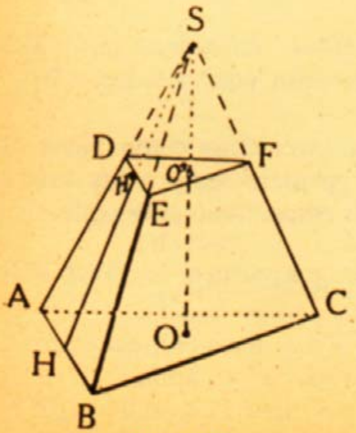


Fig. 351

El poliedro ABC—DEF es un tronco de pirámide. (Fig. 351).

Altura del tronco es la distancia entre las dos bases. OO' es la altura del tronco.

Las caras laterales de un tronco de pirámide son trapecios.

Si el tronco resultante es de una pirámide regular, se llama *tronco piramidal regular*.

En este caso las caras laterales son trapecios isósceles congruentes.

Se llama *apotema lateral del tronco*, la altura de una de sus caras laterales.

HH' es la apotema lateral. (Fig. 351)

La parte que falta al tronco para completar la pirámide total, se llama *pirámide complementaria o deficiente.*

En la Fig. 351 la pirámide complementaria es S-DEF.

§ 7.—*POLIEDROS SEMEJANTES*

Poliedros semejantes son los que tienen respectivamente iguales los ángulos rectilíneos, y semejantes las caras homólogas.

De esta definición se desprende que cuando dos poliedros son semejantes:

1º *Sus ∢s diedros homólogos son iguales*;

2º *Todas sus dimensiones homólogas son proporcionales entre sí* (alturas, aristas, apotemas. . .). Esta razón común se llama *razón de similitud.*

TEOREMA CIX.—**Todo plano trazado paralelamente a la base de una pirámide determina otra pirámide semejante a la propuesta.**

Dem.): Sea **P** una pirámide cualquiera y sea **EG** una sección paralela a la base AC. Hay que demostrar que la pirámide **S—EFGL** y **S—ABCD** son semejantes. (**Fig. 352**).

1º Las caras homólogas son semejantes. En efecto:

EFGL~ABCD (Teor. CVI)

Las caras laterales también lo son por tener en **S** un ángulo igual comprendido entre lados proporcionales.

2º Los ∢s rectilíneos son respectivamente iguales.

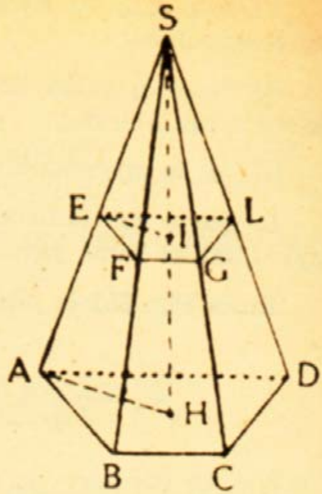


Fig. 352

En los triedros A y E los ∢s de las caras son respectivamente iguales por pertenecer a polígonos semejantes. Luego estos ∢s triedros podrían coincidir. Lo mismo ocurre con los demás triedros.

EJERCICIOS DE APLICACION

178.—Un prisma recto tiene por base un hexágono regular de 10 cm. de lado. Sus caras laterales son cuadradas. Calcular la longitud de las tres diagonales que parten de uno de sus vértices.

* **179.**—Las tres dimensiones de un paralelepípedo recto de base rectangular son entre sí como 2 : 3 : 6. Calcular dichas dimensiones sabiendo que una de sus diagonales mide 35 cm

• **180.**—La arista de un cubo mide $10\sqrt{3}$ cm. ¿Cuál es la longitud de una de sus diagonales?

• **181.**—Si una diagonal de un cubo mide 30 cm. ¿Cuánto mide su arista?

182.—Demostrar que en un paralelepípedo de base rectangular la suma de los cuadrados de las tres aristas que concurren a un mismo vértice es equivalente al cuadrado de una de sus diagonales.

• **183.**—Demostrar que en un paralelepípedo una sección plana corta cuatro aristas paralelas, dicha sección es un paralelógramo.

• **184.**—Si por dos aristas opuestas de un cubo se hace pasar una sección plana (**plano diagonal**), decir la naturaleza del polígono de la sección y calcular su área si la arista del cubo es igual a $10\sqrt{2}$.

185.—Demostrar que en un paralelepípedo las rectas que unen los puntos medios de dos aristas paralelas situadas en distintas caras, se cortan en un mismo punto que, coincide con el punto de concurrencia de las diagonales.

186.—Por los extremos de tres aristas de un cubo que parten de un mismo vértice A se hace pasar un plano.

Demostrar que la sección resultante es un $\triangle$ equilátero y que la diagonal AA' es perpendicular al plano de sección. Determinar la posición del punto en que la diagonal corta la sección.

• **187.**—La altura de una pirámide recta regular triangular mide 8 m. y su arista basal es igual a $6\sqrt{3}$. ¿Cuánto mide su arista lateral?

• **188.**—En una pirámide recta regular triangular, 1º la arista basal $= 6\sqrt{3}$ m y la altura 4 m. Calcular la apotema lateral; 2º la arista lateral $= 12$ m y su apotema lateral $= 6\sqrt{3}$ m.

Calcular la apotema basal; 3º la arista basal $= 12\sqrt{3}$ y la apotema lateral $= 10$. Calcular la altura de la pirámide; 4º la arista lateral $= 2$ m y la altura $= 1{,}6$ m. Calcular la arista basal.

189.—La arista basal de una pirámide hexagonal regular mide 4 cm y su arista lateral mide 8 cm. ¿Qué ángulo forma esta última con la base?

190.—Si en los centros de las $\odot$s circunscritas a las caras laterales de un tetraedro regular se levantan las $\perp$s a los planos de las caras, demostrar que estas $\perp$s concurren en un punto que equidista de los vértices del tetraedro.

191.—Demostrar que el plano que pasa por los puntos medios de tres aristas no $\parallel$s y no concurrentes de un cubo corta al sólido según un hexágono regular.

II.—CUERPOS REDONDOS

§ 1.—*SU DIVISION. NOCIONES PRELIMINARES*

Cuerpos redondos son los que están limitados por superficies curvas o por superficies curvas juntamente con planas.

Los principales son: *el cilindro, el cono y la esfera.*

Suelen llamarse *sólidos de revolución.* En general, se llama **superficie de revolución** *la superficie engendrada por una línea que gira alrededor de un eje, llamado eje de revolución.*

La línea móvil es la *generatriz.*

Sólido de revolución es *el cuerpo engendrado por una superficie plana que gira alrededor de un eje situado en el mismo plano.*

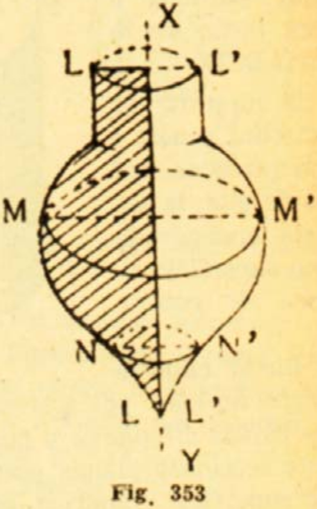


Fig. 353

NOTA.—En la Fig. 353 **XY** es la recta o eje; **LMN** es una línea situada en el plano del eje que, al girar en torno de él, engendra la superficie de revolución.

Cada punto de la línea **LMN**, **M** y **N**, por ej., genera una circunferencia cuyo plano es perpendicular a **XY**, y cuyo centro se encuentra sobre **XY**.

La superficie plana **XYLNM**, al girar en torno de **XY**, engendra un sólido de revolución; en este caso genera un trompo.

§ 2.—*EL CILINDRO DE REVOLUCION*

Se llama **superficie cilíndrica** *la engendrada por una línea recta llamada* **generatriz** *que, permaneciendo siempre paralela a sí misma, se mueve en torno de una curva fija llamada* **directriz**.

En la Fig. 354 la recta AA' se mueve siempre paralela a EF en torno de la curva ABCD.

Si la directriz es una circunferencia y la generatriz es ⊥ al plano de ella, la superficie engendrada se dice *superficie cilíndrica de revolución.*

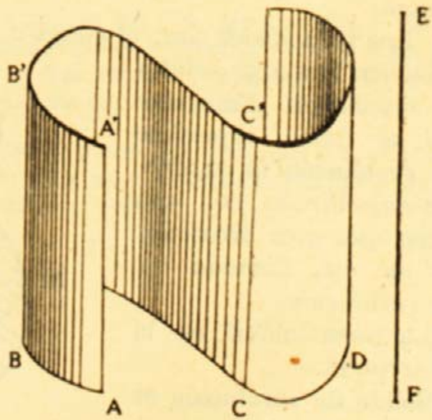


Fig. 354

Se llama **cilindro** *el cuerpo limitado por una superficie cilíndrica y dos secciones planas circulares y paralelas.*

Las secciones planas paralelas y circulares que limitan la superficie cilíndrica, son las *bases del cilindro.*

La recta que une los centros de los dos círculos basales, es el *eje del cilindro.*

El cilindro puede ser *recto* (1) *u oblicuo,* según que las generatrices sean o no perpendiculares a las bases.

---

(1) Tanto en los problemas como en el desarrollo de la materia, nos referiremos más especialmente, al cilindro recto.

Cilindro circular recto o cilindro de revolución, *es el cuerpo generado por la rotación o revolución completa de un rectángulo alrededor de uno de sus lados.*

En la Fig. 355 el lado **DB**, alrededor del cual gira el rectángulo, es a la vez *eje y altura* del cilindro.

El lado opuesto **CA** es la *generatriz* que genera la *superficie lateral del cilindro o superficie cilíndrica.*

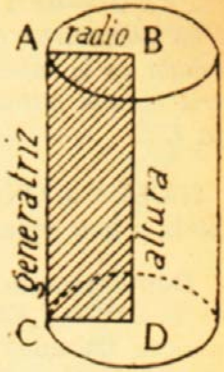


Fig. 355

En este cuerpo, todas las generatrices son iguales y paralelas entre sí y con el eje, y perpendicularmente a los círculos basales.

Los lados BA y DC generan los *círculos basales.*

En resumen: **el cilindro está limitado por 3 caras: dos planas, los círculos basales, y una curva, la superficie lateral, llamada superficie cilíndrica o manto del cilindro.**

Un cilindro se genera, también, *por el movimiento de un círculo que se desplaza paralelamente a sí mismo, moviéndose su centro sobre la normal.*

Considerando el cilindro como un prisma en estado límite, se puede definir así:

Cilindro *es un prisma de una infinidad de caras laterales infinitamente angostas.*

Según esta última definición, se puede aplicar al cilindro todos los teoremas referentes al prisma que son independientes del número de caras laterales.

L. G. 27.—*El L. G. de todos los puntos del espacio, que se encuentran a una distancia dada* **r**, *de una recta fija dada, es la superficie cilíndrica de revolución, cuya directriz es una circunferencia de radio* **r** *y cuyo eje es la recta fija.*

TEOREMA CX.—**Toda sección plana de un cilindro paralela a una generatriz o al eje, es un paralelógramo.**

Demostración.— (Fig. 356).—Si **ADCB** ‖ EF, las generatrices trazadas por un punto cualquiera **G** o **I** de las intersecciones **BA** y **CD**, respectivamente, coinciden con el plano de la sección, por ser paralelas con **EF**.

Las generatrices trazadas por **G** e **I**, pues, pertenecen al mismo tiempo a la sección y a la superficie cilíndrica y como son paralelas e iguales, el cuadrilátero **ADCB** es un **paralelógramo,** (Un cuadrilátero que tiene dos lados opuestos #s es un #).

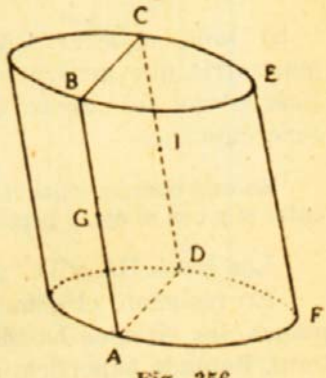


Fig. 356

Si la sección plana pasa por el eje del cilindro, se llama *sección central.*

Una sección central perpendicular a los círculos basales, se denomina *paralelógramo característico* del cilindro.

Todas las secciones centrales de un cilindro recto son rectángulos congruentes. ¿Por qué?

Llámase **tronco de cilindro** *a la parte del cilindro comprendida entre una base y una sección oblicua a ésta.*

§ 3.—EL CONO

Llámase **superficie cónica** *la que engendra una recta que, pasando por un punto fijo* **S**, *se mueve en torno de una curva fija llamada* **directriz.** (Fig. 357).

La recta móvil AA' que genera la superficie cónica, se llama **generatriz.** (Fig. 357).

La curva **ABC** es la *directriz.*

El punto fijo S se llama *cúspide o vértice.*

La *superficie cónica* se compone de dos partes u *hojas* o *mantos* opuestos por el vértice.

Si la directriz es una *circunferencia*, la recta que pasa por su centro y por la cúspide, es el *eje* de la superficie cónica.

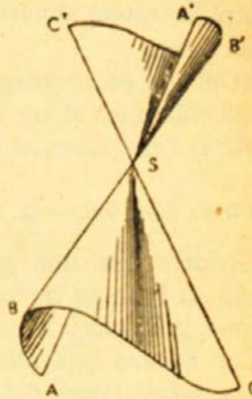


Fig. 357

Si la superficie cónica, cuya directriz es una circunferencia, se corta por un plano perpendicular al eje, el cuerpo que resulta es el *cono de revolución o cono recto.*

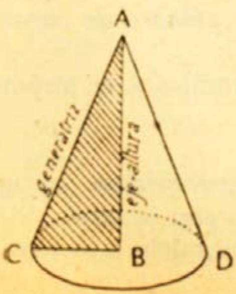


Fig. 358

Cono de revolución *es el sólido engendrado por la revolución completa de un triángulo rectángulo alrededor de uno de sus catetos como eje.*

La hipotenusa **AC** es la *generatriz.* (Fig. 358).

Durante el movimiento, este lado genera la *superficie la-*

teral o superficie cónica, que también se suele llamar *manto del cono.*

El cateto **BC** es el *radio* que genera el círculo que sirve de *base* al cono.

La recta **BA** que une el centro del círculo basal con la cúspide (cateto alrededor del cual gira el △ rectáng.), es el *eje* del cono.

Si el eje es perpendicular a la base, el cono es *recto o de revolución;* si no es perpendicular a ella, es *oblicuo.*

Altura del cono es la perpendicular de la cúspide a la base.

En el cono recto la altura coincide con el eje.

Se dice que una **pirámide** está **inscrita** en un cono cuando su base es un polígono inscrito en el círculo basal del cono y su cúspide coincide con la del cono.

Las aristas laterales de la pirámide inscrita coinciden con las generatrices del cono.

Como el círculo se puede considerar como un polígono regular de una infinidad de lados, el cono se puede considerar como una **pirámide en estado límite,** pudiéndose definir:

Cono *es una pirámide de infinito número de caras laterales infinitamente angostas.*

Los teoremas y propiedades referentes a la pirámide, son aplicables al cono.

Se puede, pues, enunciar:

1) **En un cono recto, todas las generatrices son iguales entre sí y forman ángulos iguales con la base.**

2) **Toda sección plana del cono paralela a la base, es un círculo.**

Sea la Fig. 359.

Dem.) Se trazan las generatrices **CA** y **CB** y el eje **CO**.

El eje corta la sección en **O'**.

Por **CA** y **CB** se hacen pasar dos planos de modo que ambos pasen por CO.

Estos planos cortan la sección según las rectas O'D y O'E.

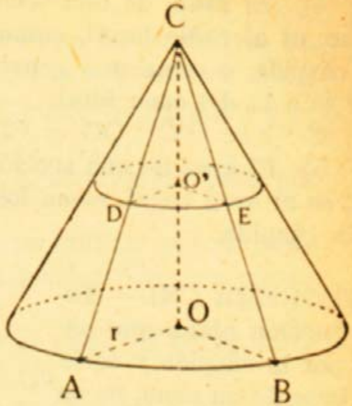


Fig. 359

Resulta: O'D || OA (Las secciones son ||s)

O'E || OB (Id.)

También:

$$\frac{O'D}{OA} = \frac{CO'}{CO}$$

$$\frac{O'E}{OB} = \frac{CO'}{CO}$$

Luego:

$$\frac{O'D}{OA} = \frac{O'E}{OB}$$

Pero OA = OB (radios de la base)

Entonces: O'D = O'E

Luego: la sección que pasa por O' es un círculo. (Tiene los radios iguales).

3) **El centro de cualquier sección plana || a la base de un cono, está situada en el eje del cono.**

4) **El radio de una sección plana ∥ a la base de un cono, es al radio basal, como sus distancias respectivas a la cúspide, o como una generatriz del cono complementario es a la del cono total.**

$r' : r = O'C : OC = CD : CA$ (Fig. 359).

5) **El área de una sección plana ∥ a la base de un cono, es al área basal, como los cuadrados de sus distancias a la cúspide.**

TEOREMA CXI.— **Toda sección plana que pasa por la cúspide y corta la base de un cono, es un triángulo.**

Dem.) La sección CAB corta la base según la recta AB. (Fig. 360).

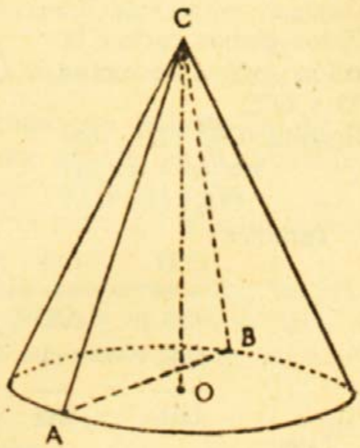


Fig. 360

Las generatrices CA y CB están situadas en el plano de la sección, porque tienen dos puntos comunes con él: C y A de una y C y B de la otra.

Luego la tesis es verdadera.

COROLARIO.—*Toda sección plana que pasa por la cúspide y el eje de un cono recto es un triángulo isósceles.*

La sección plana que pasa por la cúspide y por el eje de un cono, se llama *sección central.*

El △ que resulta se llama △ *característico del cono.*

Resumiendo se puede enunciar que:

Si un cono recto de base circular se corta por un plano, pueden resultar las secciones siguientes:

a) Un **círculo,** cuando el plano es paralelo a la base;

b) Un **triángulo isósceles,** si dicho plano pasa por el eje.

c) Una **elipse,** si el plano es oblicuo con respecto a la base y corta a todas las generatrices sin cortar a la base;

d) Una **hipérbola,** cuando el plano es perpendicular a la base y no pasa por el eje.

e) Una **parábola,** cuando es paralela a una generatriz.

§ *4.—CONOS SEMEJANTES*

Una sección MN paralela a la base AB de un cono SAB determina un segundo cono SMN semejante al primero. Fig. 361.

De modo general, **dos conos son semejantes cuando los △s rectángulos generadores, son semejantes.**

Las áreas laterales o totales de dos conos se-

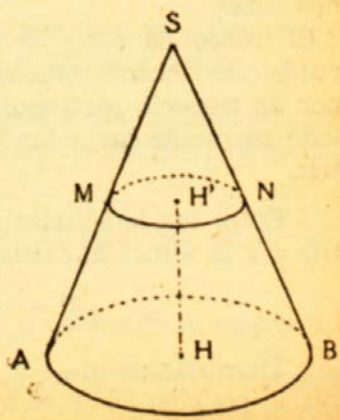


Fig. 361

mejantes son entre sí como los cuadrados de las alturas, o de los radios, o de las generatrices.

Los volúmenes de dos conos semejantes son entre sí como los cubos de las alturas, o de los radios, o de las generatrices.

§ 5.—*CONO TRUNCADO*

Tronco de cono de revolución o cono truncado recto de bases paralelas, *es la porción de cono comprendida entre la base y una sección paralela a esta base.* (Fig. 362).

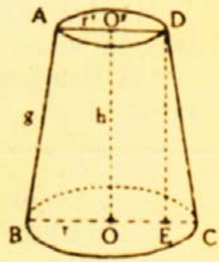


Fig. 362

Las bases del tronco son dos círculos y la altura es la distancia de las dos bases.

El tronco de cono de revolución puede considerarse como engendrado por un trapecio rectángulo ABOO' que gira alrededor del lado perpendicular a las bases. El lado AB es la generatriz.

Entre las longitudes r y r' de los radios, la generatriz **g** y la altura **h**, existe la siguiente relación:

$$g^2 = h^2 + (r - r')^2.$$

Demostración.—Se traslada la altura "**h**" hasta ocupar la posición DE y se aplica el teor. de Pitágoras en el △ rectángulo DEC. Fig. 362.

Cono complementario, es la parte que falta al tronco para completar el cono.

Un tronco de pirámide está inscrito en un tronco de cono cuando sus bases son polígonos inscritos en las bases del tronco de cono y sus aristas laterales se confunden con las generatrices del tronco de cono.

El tronco de cono recto se puede considerar como un tronco de pirámide en estado límite.

La sección central de un tronco de cono recto es un trapecio isósceles, cuyas bases son 2r y 2r' respectivamente. El lado es la generatriz del tronco.

§ *6.—LA ESFERA*

Esfera *es el sólido limitado por una superficie cuyos puntos equidistan de otro interior llamado centro.*

Se puede también decir que es el sólido generado por la rotación completa de un semicírculo alrededor de su diámetro.

La semicircunferencia genera la superficie de la esfera, llamada **superficie esférica**.

El centro del semicírculo, es el **centro de la esfera.**

El radio del semicírculo, es el **radio** de la esfera: **es la recta que une un punto de la superficie esférica con el centro.** Se designa por R.

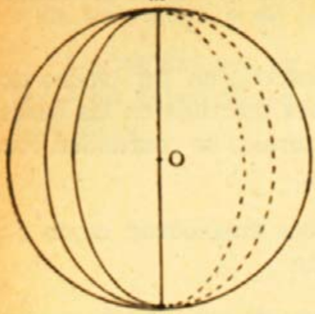


Fig. 363

Diámetro de una esfera, es la recta que pasa por el centro y une dos puntos opuestos de la superficie esférica. Es igual a 2R.

La superficie esférica es superficie cerrada. Divide al espacio en dos regiones:

1º La región **interior** cuyos puntos están a una distancia del centro menor que el radio.

2º La región **exterior** cuyos puntos están a una distancia del centro, mayor que el radio.

Todos los puntos que se hallan sobre la superficie esférica están a una distancia **R** del centro O.

L. G. 28.—*La superficie esférica es el L. G. de todos los puntos del espacio que se encuentran a la distancia del radio R, de un punto del espacio.*

TEOREMA CXII.—**Toda sección plana de una esfera es un círculo.**

Sea la sección EDF (**Fig. 364**).

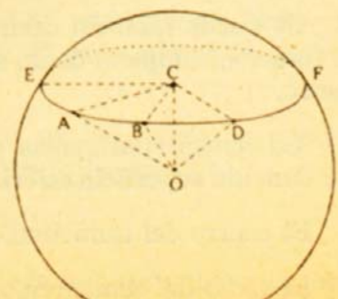


Fig. 364

Tes.) Sección EDF es un círculo.

Dem.) Se traza OC⊥secc. EDF.

Se unen C y O con tres puntos arbitrarios A, B y D de la curva de la sección.

$\triangle OCA \cong \triangle OCB \cong ODC$.

Tienen OC lado común.

y $OA = OB = OD$ (Por ser radios de la esfera).

$\sphericalangle ACO = \sphericalangle BCO = \sphericalangle DCO$ (Por ser $\sphericalangle$s rectos)

Luego $CA = CB = CD$.

y Secc EDF es un círculo. (Cualquiera de los puntos de la curva de la sec. equid. de **C**)

COROLARIOS.—1. *El centro de una sección plana de la esfera es el pie de la $\perp$ bajada del centro de la esfera a la sección.*

2. *La recta que une el centro de una sección plana con el centro de la esfera es $\perp$ a la sección.*

3. La $\perp$ *levantada en el centro de una sección plana, pasa por el centro de la esfera.*

Cálculo del radio **r** de la sección plana.

Sea la Fig. 364.

$OA = R$ (radio de la esfera).

$OC = d$ (distancia de la Secc. al centro).

$CA = r$ (radio de la sección circular).

$\triangle OCA$ es $\triangle$ rectángulo en C.

Luego: $r = \sqrt{\mathbf{R}^2 - \mathbf{d}^2}$. (Teor. Particular de Pitágoras).

Polos de una sección plana *de una esfera son los extremos del diámetro perpendicular a esta sección.*

P y P' son los polos de la sección plana ACB (Fig. 365). Son también los polos de la esfera.

Los polos de la sección circular equidistan de todos los puntos de su circunferencia.

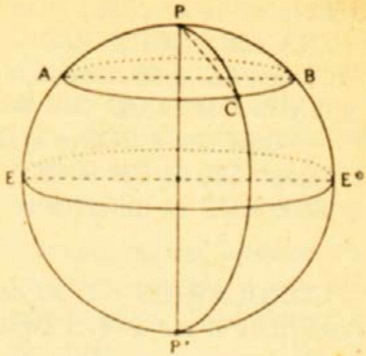


Fig. 365

Círculo máximo de una esfera *es la sección plana que pasa por el centro.* PCP' y EE' son ⊙ máximos.

Entre los círculos máximos se distinguen los *círculos meridianos* y el *ecuador*.

Meridiano es el círculo máximo que pasa por dos puntos diametralmente opuestos considerados como polos. PBE'P' y PCP', son meridianos Fig. 365).

Ecuador es el círculo máximo que está a igual distancia de los polos. Es ⊥ a todos los planos meridianos. EE' es el ecuador, siendo los polos P y P'. (Fig. 365).

Círculo menor de una esfera es la sección plana que no pasa por el centro de la esfera. Ej.: Círculo ACB, (Fig. 365).

Se llaman **paralelos los círculos menores paralelos al** ecuador. Ej.: ACB. (Fig. 365).

Se llama **distancia polar,** la distancia que existe desde un polo a un punto de la circunferencia de una sección plana. Se mide sobre la cuerda o su arco de circunf. máxima que une ambos puntos. **CP** es la distancia polar del punto **C.** (Fig. 365).

TEOREMA CXIII.—**La distancia polar de una sección plana, es igual para todos los puntos de su circunferencia.**

Sean A, B y D tres puntos de la circunferencia de la sec. plana ADB. (Fig. 366).

Tes.) PA=PB=PD.

Dem.) Se une C con A, B y D.

$\triangle APC \cong \triangle BPC \cong \triangle DPC$

Tienen:

PC común.

CA=CB=CD (radios de la sección)

$\sphericalangle ACP = \sphericalangle BCP = \sphericalangle DCP$ (Por ser rectos)

Luego: PA=PB=PD.

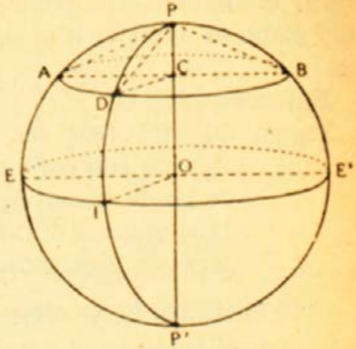


Fig. 366

COROLARIO.—*Los arcos correspondientes a una misma distancia polar, son iguales*. En la Fig. 366, arc AP= arc DP=arc BP. (Por corresponder a cuerdas iguales de ⊙s máximas de una misma esfera).

El arc. **AP** se llama **radio esférico.**

PLANO TANGENTE.—*Un plano es tangente a una esfera, cuando tiene con ella un solo punto común.*

TEOREMA XCIV.—**Todo plano tangente a una esfera es perpendicular al radio en el punto de contacto.**

Hip.) Plano MN tangente (Fig. 367).

Tes.) $OI \perp MN$.

Dem.) Siendo I el único punto común al plano y a la esfera, cualquier otro punto K del plano es exterior a la esfera.

Entonces OK>OI

Luego OI⊥MN (Por ser OI la recta más corta que se puede trazar desde O al plano MN. Corolario de Teor. XC).

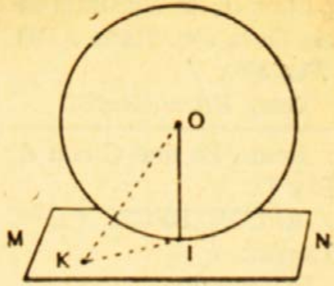


Fig. 367

TEOREMA XCV.—(Recíproco del XVIV).—**Todo plano perpendicular en el extremo de un radio de una esfera, es tangente a esta esfera.**

Hip.) OI⊥MN en I (Fig. 367).

Tes) I único punto de contacto con MN.

Demostración.—Cualquier otra recta OK, por ejemplo, es oblicua al plano y, por lo tanto, mayor que OI. Luego, K está fuera de la esfera.

El plano MN no tiene, pues, más que el punto I común con la esfera.

Luego MN es tangente a la esfera.

Se llama *normal a la esfera en un punto dado, la perpendicular al plano tangente en dicho punto, o el radio de la esfera que termina en ese punto.*

Una recta es **tangente** a una esfera cuando tiene con ella un solo punto común, llamado punto de contacto.

TEOREMA CXVI.—**Toda recta perpendicular al radio de una esfera en su extremo, es tangente a la superficie esférica.**

Demostración.— (Fig. 368).— La recta AT perpendicular en el extremo del radio OA está en el plano perpendicular a este radio en su extremo A.

Ahora bien, este plano es tangente a la esfera.

Luego la recta dada y la esfera no tendrán más punto común que el punto A.

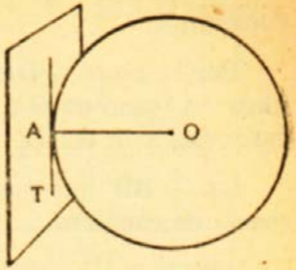


Fig. 368

TEOREMA (recíproco del CXVI).—**Toda recta tangente a una esfera es perpendicular al radio en el punto de contacto.**

L. G. 29.—*El L. G. de todas las tangentes a una esfera en un punto dado A de ella, es el plano tangente a dicha esfera en el punto dado.*

§ 7.—*CONO Y CILINDRO CIRCUNSCRITOS A UNA ESFERA*

L. G. 30.— *El L. G. de las tangentes trazadas a una esfera O, desde un punto situado fuera A, es una superficie cónica de revolución.*

Dem.) Desde el punto A se traza una tangente cualquiera AC, a la esfera.

Sea C punto de contacto. (Fig. 369).

El plano determinado por el centro O y la tangente AC, corta a la esfera según un ⊙ máximo, al cual es tangente la recta AC.

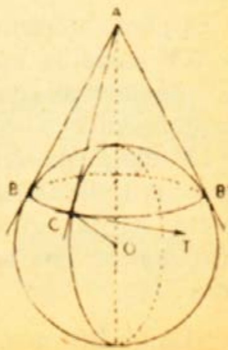


Fig. 369

El △ rect. **OAC** tiene la hipotenusa **OA** y el cateto **OC** constantes.

Por lo tanto ∢**OAC** es constante y la tangente **AC** al girar en torno de **OA** engendra una superficie cónica circunscrita a la esfera.

La ⊙ **BB'** que pasa por el punto C se llama **circunferencia de contacto.**

L. G. 31.—*El L. G. de las tangentes trazadas a una esfera O, paralelamente a una dirección dada, es una superficie cilíndrica de revolución.*

Demostración.—Sea XY un diámetro || a una dirección dada. (Fig. 370).

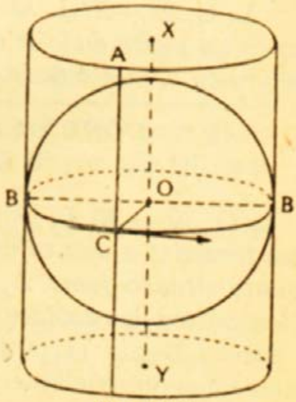


Fig. 370

Se traza paralelamente a XY una tangente cualquiera AC a la esfera, siendo **C** su punto de contacto.

El plano determinado por **AC** y **XY** corta la esfera según un ⊙ máximo al cual la recta **AC** es tangente.

La distancia entre AC y XY es = al radio **OC** de la esfera. La recta AC, al girar en torno de XY, genera una superficie cilíndrica circunscrita a la esfera.

La ⊙ BB' que pasa por C se llama **circunferencia de contacto**.

Zona esférica.—*Llámase zona esférica la parte de la superficie esférica comprendida entre dos planos paralelos.*

Se distinguen: la zona de **dos bases:** Ej.: ABCD (Fig. 372) y la zona de **una base o casquete esférico.** Ej.: EGF. (Fig. 372).

La zona tiene una sola base cuando uno de los planos es tangente a la esfera.

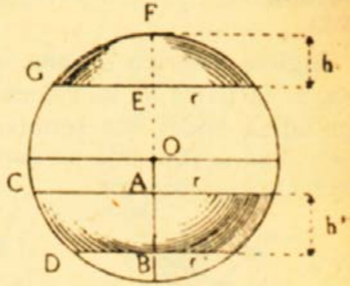


Fig. 371

Altura de la zona *es la distancia entre los planos paralelos que determina la zona.* En la Fig. 371, **AB=h' y EF=h** representan las alturas de las zonas respectivas.

La zona se puede considerar engendrada por la rotación de un arco CD de un círculo máximo, alrededor de un diámetro FB. (Fig. 371).

Segmento esférico *es la parte de la esfera comprendida entre una zona esférica y sus bases.* (Fig. 372).

El segmento no es superficie, es un sólido, un volumen.

Puede estar limitado por **dos círculos paralelos** y por la **zona** que ellos determinan. Ej.: ABCD, o por un **círculo** y un **casquete esférico.** Ej.: EFG. (Fig. 372).

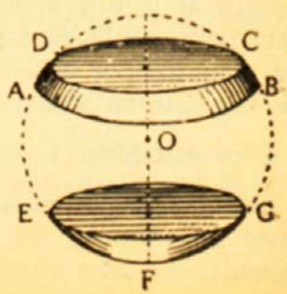


Fig. 372

Huso esférico es la parte de la superficie esférica comprendida entre dos semicírculos meridianos. Ej.: el huso ABDIA. (Fig. 373).

Inglete esférico o cuña esférica, es la parte de la esfera comprendida entre dos semicírculos meridianos. (Un gajo de naranja). Ej.: ABDCA. (Fig. 373).

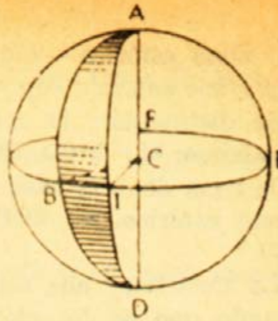


Fig. 373

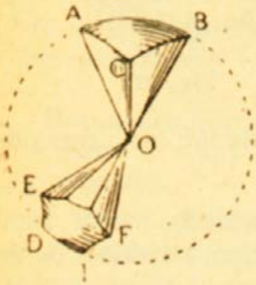


Fig. 374

Pirámide esférica es la parte de la esfera comprendida entre los planos de un ángulo poliedro, cuyo vértice se halla en el centro de la esfera. (Fig. 374).

La base de la pirámide puede ser un polígono cualquiera: triángulo, cuadrilátero, hexágono esférico, etc.

Sector esférico, es un cono cuyo vértice está en el centro de la esfera, y su base es una parte de la superficie esférica, limitada por la circunferencia de una sección plana. (Fig. 375).

Otra definición:

Se llama **sector esférico** el volumen engendrado por un **sector circular** que gira alrededor de un diámetro situado en su plano.

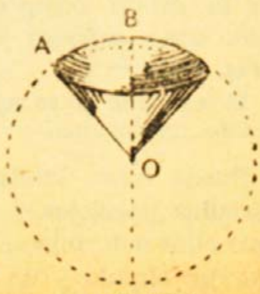


Fig. 375

PROBLEMA 39.— *Dados cuatro puntos* **A, B, C** *y* **D**, *no situados en un mismo plano, determinar el centro y el radio de la esfera sobre cuya superficie se hallan situados dichos puntos.*

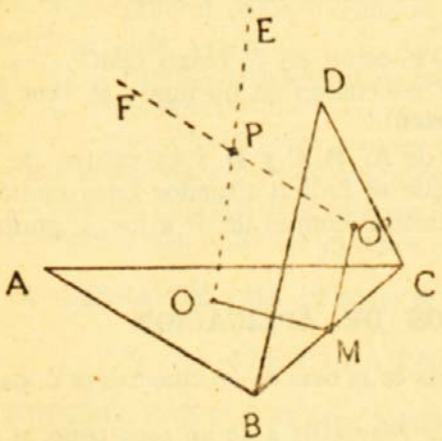


Fig. 376

Sea la Fig. 376.

Se unen los puntos A, B y C. Resulta el △ o plano **ABC**.

También se unen B, C y D. Se tiene el △**BCD**.

Los dos planos se cortan según la recta **BC**. En O y O', centros de las ⊙s circunscritas ABC y BCD se levantan las ⊥s OE y O'F a los respectivos planos.

OE es el L. G. de los puntos del espacio que equidistan de A, B y C.

O'F = L. G. de los puntos que equidistan de B, C y D.

En efecto, si se une cualquier punto de OE con A, B y C, resultan oblicuas que se apartan igualmente del pie O de la ⊥.

Lo mismo sucede con cualquier punto de O'F.

Se marca el punto medio M de BC.

Se une M con O y O'.

Resulta: $\left.\begin{array}{l} OM \perp BC \\ O'M \perp BC \end{array}\right\}$ MO y MO' son simetrales de BC.

Plano **OMO'$\perp$BC.** (Teor. LXXXVII).

Por tanto OMO'$\perp$a los planos ABC y BCD. (Estos planos contienen BC).

Entonces: OE y O'F están en el plano OMO'.

También OE y O'F concurren en un punto P. (Por ser $\perp$s a dos rectas que se cortan).

Luego **P** equidista de **A, B, C y D** y es centro de la superficie esférica en que se hallan situados tales puntos.

El radio es la distancia común de P a los 4 puntos dados.

EJERCICIOS DE APLICACION

* **192.**—La circunferencia de la base de un cilindros es C. Calcúlese el valor del radio.

* **193.**—¿Cuánto mide la generatriz **g** de un cono recto, si el radio de la base=6 m. y la altura=8 m?

* **194.**—Calcular la altura de un cono recto cuya generatriz mide 10 m y el radio basal es igual a $5\sqrt{3}$ m.

195.—Calcular el radio basal de un cono recto cuya generatriz mide 20 m y su altura 16 m.

196.—Escriba la fórmula que permita hallar:

1º la generatriz **g** de un cono recto en función de su altura h y de su radio basal **r**.

2º **h** en función de **g** y **r**.

3º **r** en función de **g** y **r**.

197.—¿Cuál es la altura de un cono recto cuya generatriz es 15 y la circunferencia basal $= 18\pi$?

* **198.**—¿Cuál es la altura de un tronco de cono recto cuyos radios basales miden respectivamente r=13 m; r'=7 m y la generatriz 10 m.

CAPITULO XXII

DETERMINACION DE LAS AREAS DE LOS CUERPOS GEOMETRICOS

La regla general para calcular el área de los cuerpos geométricos es la siguiente:

a) *Si el cuerpo es poliedro se calcula el área de cada uno de los polígonos o caras que forman su superficie, según las reglas establecidas por la Geometría plana, y, enseguida se suman las áreas obtenidas.*

b) *Para los cuerpos redondos se aplican, generalmente, las mismas reglas de los cuerpos poliedros.*

I.—AREA DE LOS CUERPOS POLIEDROS

§ *1.—AREA DEL PRISMA*

TEOREMA CXVII.—**El área lateral de un prisma recto es igual al producto de su altura** (o arista lateral) **por el perímetro de una de las bases.** (Fig. 377).

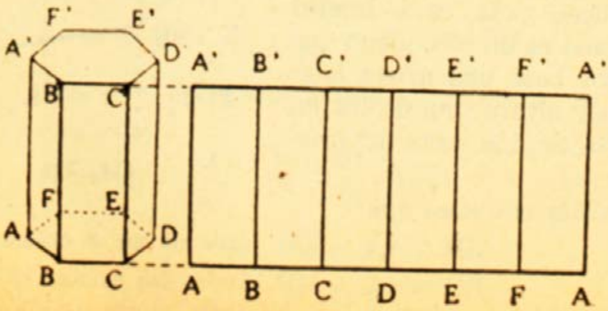


Fig. 377

Demostración.—Al desarrollar la superficie lateral, resulta un rectángulo cuyos lados contiguos son AA'=alt. del prisma=**h.**

y AA = AB+BC+CD+DE+EF+FA = perímetro de una de las bases = 2s.

Luego área lat. pr. recto=área rect. AAA'A'=h . 2s.

$$\boxed{S_{1\ \text{pr. recto}} = \mathbf{h} \cdot \mathbf{2s}}$$

TEOREMA CXVIII.—**El área lateral de un prisma oblicuo es igual al producto de una arista lateral por el perímetro de una sección recta.**

Sea el prisma oblicuo B'—ABCD. (Fig. 378).

Hip.) EF es sección recta.

Tes.) $S_1 = \overline{AA'}\ (\overline{EM} + \overline{MF} + \overline{FN} + \overline{NE})$

Dem.) AA'=BB'=CC'=DD'

Las aristas laterales son $\perp$s a la sección recta y por lo tanto a los lados de dicha sección.

Entonces cada cara lateral del prisma es un # oblicuo que tiene por base una arista lateral y por altura uno de los lados de la sección recta del prisma.

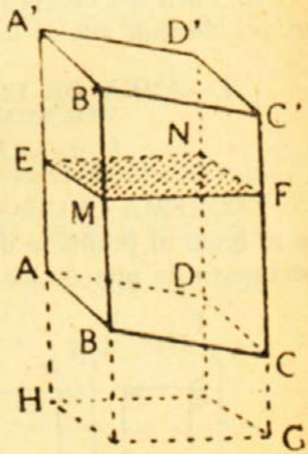


Fig. 378

Resulta entonces que:

$AB' = \overline{AA'} \cdot \overline{EM}$ (área de un # oblicuo).

$BC' = \overline{AA'} \cdot \overline{MF}$ (Todas las aristas laterales son =s entre sí)

$$CD' = AA' \cdot FN$$
$$DA' = AA' \cdot NE$$

$$S_{lat.} = AB' + BC' + CD' + DA' = \overline{AA'}(\overline{EM} + \overline{MF} + \overline{FN} + \overline{NE})$$

(Q. E. D.)

COROLARIOS: 1º.—*Tanto en el prisma recto como en el oblicuo, el área total se obtiene añadiendo al área lateral el área de las dos bases.*

$$\boxed{S_{tot.\ pr.} = h \cdot 2s + 2B}$$

2º.—*En el cubo, designando por* **a** *la arista, se tiene:*

$$\boxed{S_{tot.} = 6a^2}$$

PROBLEMA 40.—*Calcular el área total de un prisma recto hexagonal cuya arista basal es* **a** *y su altura* **h**.

Solución.—

Se sabe que: $S_{tot.\ pr.} = h \cdot 2s + 2B.$

$B = s \cdot \rho$ (s=semiperímetro y ρ=apotema del pol. reg.)

$$B = 3a \cdot \frac{a}{2}\sqrt{3} = \frac{3a^2}{2}\sqrt{3}$$ (ρ=alt. de un Δ fund. pág. 374)

$$S_{tot.} = h \cdot 6a + 2 \cdot \frac{3a^2}{2}\sqrt{3} = 6ah + 3a^2\sqrt{3}$$

EJERCICIOS DE APLICACION

199.—Calcular el área de un cubo cuya arista mide 5 m.

* **200.**—¿Cuál es la área total de un cubo en que la diagonal de una de sus caras es: 1º $3\sqrt{a}$?; 2º m?

* **201.**—¿Cuál es el área total de un cubo cuya diagonal mide 1º) $4\sqrt{3}$?; 2º) d.?

* **202.**—Si el área total de un cubo es 294 m^2 ¿Cuánto mide su arista?

203.—¿Cuánto debe medir la arista de un cubo para que su área sea la mitad de la de otro que tiene 16 m de arista?

* **204.**—Si el área total de un cubo es 108 m^2. ¿Cuánto mide la diagonal de una cara?

* **205.**—Si el área total de un cubo es 500 m^2 ¿Cuál es la longitud de una de sus diagonales?

206.—¿Cuál es el área total de un paralelepípedo rectangular cuyas aristas concurrentes a un mismo vértice miden 4 m, 8 m, 5 m?

207.—El área total de un paralelepípedo rectangular es equivalente a la de un cubo. Si el paralelepípedo mide 40,2 cm de largo, 12 cm de ancho y 8 cm de alto, ¿cuánto mide una de las diagonales del cubo?

208.—El área total de un paralelepípedo de base cuadrada es 80 m^2; su altura es 3 m. Calcular el lado de la base.

209.—El área total de un prisma recto de base rectangular es 100,2 m^2 y su altura es 2 m. Las dimensiones de la base son entre sí como 2 : 3. Calcular la longitud de una de las diagonales.

210.—Calcular el lado de la base de un prisma hexagonal regular, cuya área total es igual a $648+108\sqrt{3}$ y su altura al triple del lado de la base.

211.—El área lateral de un prisma recto de base pentagonal regular es 104 m^2. Calcular su altura sabiendo que uno de los lados de la base es igual a 2,60 m.

212.—El área lateral de un paralelepípedo rectangular es 63 m^2 y su altura 2 m. Calcular el perímetro de la base.

* **213.**—Las tres aristas que concurren a un mismo vértice de un paralelepípedo rectangular suman 17 m.

Calcúlese cuánto mide cada una de ellas, sabiendo que la diagonal de una de sus bases es 10 m y la superficie total del paralelepípedo es 180 m^2.

214.—Calcular el área total de un paralelepípedo recto de base rombal, sabiendo que uno de los ángulos de la base mide 60°, la arista basal 4 m y la altura 5 m.

215.—La base de un prisma recto regular hexagonal se halla inscrita en una $\odot$ de 12 cm. de radio. Calcular el área total del prisma si su arista lateral mide 80 cm.

216.—Calcular el área total de un paralelepípedo recto de base rectangular cuyas aristas concurrentes a un mismo vértice son entre si como 1 : 3 : 5 y cuya diagonal es igual a $4\sqrt{35}$ cm.

* **217.**—La base de un prisma recto es un triángulo equilátero inscrito en una circunferencia cuyo radio es 3 m. Calcúlese la altura, sabiendo que su área lateral es $135\sqrt{3}$ m^2.

218.—¿Cuál es el área total de un prisma octogonal regular, si la arista basal mide 4 m y su altura 6 m?

219.—En un prisma oblicuo, la proyección de la arista lateral sobre la base es 3 m; la altura es 4 m. Calcular el perímetro de una sección recta si el área lateral del prisma es igual a 60 m^2.

220.—La superficie de un prisma es 22,04 m^2. ¿Cuál es la de un prisma semejante cuyas dimensiones son la mitad de las del primero?

§ 2.—*AREA DE UNA PIRAMIDE REGULAR*

TEOREMA CXIX.—**El área lateral de una pirámide regular es igual al producto del semiperímetro de la base, por la apotema lateral.**

Sea la pirámide P—ABCD. (Fig. 379).
MP=ρ=apotema lateral.

Tes.) $S = s \cdot \rho$

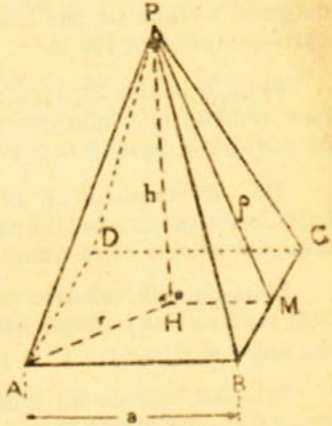


Fig. 379

Dem.) Se calcula el área de cada una de las caras laterales y se suman las áreas, sacando ρ en factor común.

Resulta:

$$\triangle ABP = \frac{1}{2} AB \cdot \rho = \frac{1}{2} a \rho$$

$$\triangle BCP = \frac{1}{2} BC \cdot \rho = \frac{1}{2} b \rho$$

$$\triangle CDP = \frac{1}{2} CD \cdot \rho = \frac{1}{2} c \rho$$

$$\triangle ADP = \frac{1}{2} AD \cdot \rho = \frac{1}{2} d \rho$$

$$\triangle ABP + \triangle BCP \; \triangle CDP + \triangle ADP =$$

$$\left(\frac{1}{2} a + \frac{1}{2} b + \frac{1}{2} c + \frac{1}{2} d\right) \rho = s \cdot \rho$$

Luego $S_{1 \text{ pir. reg.}} = s \cdot \rho$

En forma breve se puede demostrar así:

Designando por **l** el lado de la base y por **n** el número de lados, se tiene:

$$S \text{ de } 1 \triangle \text{ lat.} = \frac{1}{2} l \cdot \rho$$

$$S_{lat.} = \frac{1}{2} l \rho \cdot n \text{ o } \frac{1}{2} n l \rho = s \cdot \rho$$

Para obtener el área total de la pirámide, se añade al área lateral, el área de la base.

$$\boxed{S_{lat.\,pi.} = \frac{1}{2} n l \rho = s \cdot \rho}$$

$$\boxed{\mathbf{S}_{tot.\,pi.} = \mathbf{s}\, \rho + \mathbf{B}}$$

§ *3.—AREA DEL TRONCO DE PIRAMIDE REGULAR*

TEOREMA CXX.—**El área lateral de un tronco de pirámide regular es igual al producto de la semi suma de los perímetros basales, por la apotema lateral.**

Sea el tronco ABCD · A'B'C'D'. Fig. 380

EF $=\rho=$ apotema lateral.

Tes.) $S_{\text{lat.}} = (s+s')\ \rho$

Dem.) Todas las caras laterales son trapecios isósceles congruentes.

Designando por **l** y **l'** los lados de las bases y por **2s** y **2s'** los perímetros de las mismas, resulta:

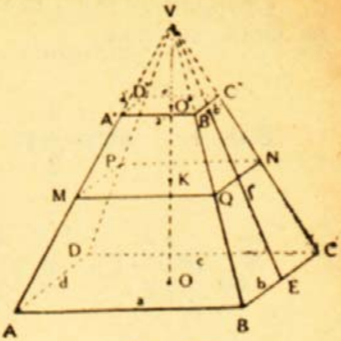


Fig. 380

$$\textbf{Area de 1 cara lat.} = \frac{1}{2}\ (l+l')\ \rho$$

$$\textbf{Area de n caras lat.} = n \cdot \frac{1}{2}\ (l+l')\ \rho$$

$$\textbf{Area de n caras lat.} = \left(\frac{1}{2}nl+\frac{1}{2}nl'\right)\ \rho$$ **(Haciendo el** producto de $\frac{1}{2}$ n por el paréntesis)

Luego:

$$\boxed{S_{\text{lat.}} = (s+s')\ \rho}$$

$$\boxed{S_{\text{tot. tr. pi}} = (s+s')\ \rho+B+B'}$$

OBSERVACION.—En la Fig. 380, MQNP es una sección media paralela a las bases del tronco de pirámide. Es fácil probar que el perímetro de esta sección es igual a la semi suma de los perímetros basales. Demuéstrese.

Por lo tanto el teorema CXX se podría enunciar como sigue:

"El área lateral de un tronco de pirámide regular es igual al perímetro de la sección media paralela a las bases por la apotema lateral del tronco".

$$\boxed{S_{\text{lat. tr. pi.}} = s_m \cdot \rho}$$

EJERCICIOS DE APLICACION

* **221.**—La arista basal de una pirámide triangular regular es 5 m y la apotema lateral 4,7 m. Calcular la superficie lateral.

* **222.**—Calcular el área total de una pirámide triangular regular cuya arista basal mide 12 m. y la arista lateral 10 m.

* **223.**—La arista basal de una pirámide de base cuadrada es 6 m y la altura 4 m. Calcular la superficie total.

224.—En una pirámide recta regular de base pentagonal, las aristas laterales miden 9 m y la arista basal 10,8 m. ¿Cuál es el área lateral del sólido?

* **225.**—Cada arista lateral de una pirámide regular hexagonal mide 5 m; el radio **r** de la base es 8 m. Calcular 1º el área lateral; 2º el área total.

* **226.**—Calcular el área total de un tetraedro regular en función 1º, de su arista cuya longitud es **a**; 2º, de su altura **h**; 3º, de su apotema lateral ρ.

227.—La altura de una pirámide regular hexagonal mide 8 m y la arista basal 4 m. ¿Cuál es el área total de la pirámide?

228.—El área lateral de una pirámide regular pentagonal es 77,05 m^2; la apotema lateral es 6,70 m. ¿Cuál es el valor de la arista basal?

* **229.**—El área total de un tetraedro regular es $36\sqrt{3}$ m^2. Calcular: 1º, la longitud de una de sus aristas; 2º, su altura.

230.—Calcular el área lateral de una pirámide recta de base cuadrada cuya arista lateral, con una inclinación de 30° sobre la base, mide 8 m.

231.—Calcular el área total de una pirámide cuadrangular recta, cuya arista basal mide 22,20 m y la altura 14,80 m.

232.—Calcular la altura de una pirámide hexagonal regular, sabiendo que la arista basal es 3 y que su superficie lateral es seis veces la superficie de la base.

* **233.**—Calcular la superficie lateral de un tronco de pirámide de bases cuadradas, si la arista basal superior es 5; la inferior 8 y la apotema lateral 4.

234.—La arista lateral de un tronco de pirámide de base hexagonal regular es 4. Las aristas basales son 12 y 8 respectivamente. Calcular el área total.

* **235.**—¿Cuál es el área de un tronco de pirámide cuadrangular regular cuyas aristas basales miden respectivamente 4 m y 2 m y la altura 4 m?

236.—Un tronco de pirámide regular, de bases cuadradas. tiene 4 m de altura y las aristas basales son 3 m y 5 m. Calcular: 1º, la longitud de las aristas laterales de la pirámide completa; 2º, la apotema lateral del tronco.

237.—Un tronco de pirámide recta tiene por bases dos rectángulos cuyas dimensiones son respectivamente 5 y 9; y 15 y 27. La altura del tronco es 24. ¿Cuál es el área total?

II.—AREA DE LOS CUERPOS REDONDOS

§ 4.—*AREA DEL CILINDRO*

TEOREMA CXXI.—**El área lateral de un cilindro de revolución es igual al producto de la circunferencia de una de sus bases por la generatriz.**

Demostración.— El cilindro de revolución es un prisma recto de infinidad de caras laterales en que la circunferencia del círculo basal es el perímetro de la base, y la generatriz, se confunde con la arista lateral o altura del prisma.

Luego:

$$\boxed{S_{l.\,cil.} = 2\,\pi\,rg.}$$

$$\boxed{S_{tot.\,cil.} = 2\,\pi\,rg + 2\,\pi\,r^2 = 2\,\pi\,r(g+r)}$$

§ 5.—*AREA DEL CONO*

a) en función de la generatriz

TEOREMA CXXII.—**El área lateral de un cono de revolución** (en función de la generatriz) **es igual al producto de la semicircunferencia basal por la generatriz.**

Demostración.— El cono de revolución es una pirámide de infinidad de caras laterales. Basta aplicar el teorema CXIX referente al área lateral de una pirámide.

Luego: $\boxed{S_{1\,cono} = \pi\, gr.}$

$$\boxed{S_{total\ cono} = \pi\, gr + \pi\, r^2 = \pi\, r\ (g+r)}$$

b) en función de la altura

TEOREMA CXXIII.—**El área lateral de un cono de revolución,** (en función de la altura), **es igual al producto de la altura, por la circunferencia que tiene por radio la parte de la $\perp$ construída en el punto medio de la generatriz y comprendida entre ésta y el eje.**

Demostración.— Sea el cono CAB. (Fig. 381).

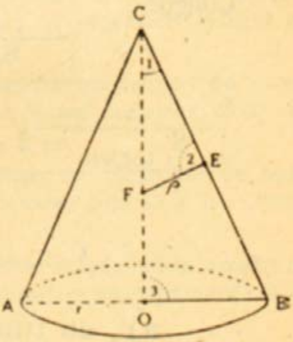


Fig. 381

$EC = EB$
$EF \perp BC$
$EF = \rho$ (corta al eje en F).
$CO = h$.
$\triangle CFE \sim \triangle CBO$.

Tienen:
$\measuredangle 1$ común y $\measuredangle 2 = \measuredangle 3 = 90°$.

Luego: $\dfrac{EF}{OB} = \dfrac{CE}{CO}$

o sea: $\dfrac{\rho}{r} = \dfrac{\frac{1}{2}g}{h}$

$\dfrac{1}{2}\, rg = \rho\, h$ (Haciendo los prod. de medios y extr.)

Multiplicando por 2π los dos m. resulta:

$$2\pi \cdot \frac{1}{2} rg = 2\pi\rho h.$$

$$\pi rg = 2\pi\rho h.$$

El primer miembro es igual al área lateral del cono. (Teor. CXXII).

También lo será el segundo.

Luego:

$$\boxed{S_{\text{lat. cono}} = 2\pi\rho h}$$

§ 6.—*AREA DEL TRONCO DE CONO*

a) en función de la generatriz

TEOREMA CXXIV.—**El área lateral de un tronco de cono (en función de la generatriz), es igual al producto de la semi suma de las circunferencias basales por la generatriz.**

Demostración.— *El tronco de cono es un tronco de pirámide en estado límite.* Bastará aplicar la fórmula de la pirámide para calcular el área lateral de este cuerpo. (Teorema CXX).

Luego:

$$\boxed{S_{\text{l del tr. cono}} = (\pi r + \pi r')g = \pi g(r + r')}$$

$$\boxed{S_{\text{tot. tr. cono}} = (\pi r + \pi r')\ g + \pi r^2 + \pi r'^2}$$

b) en función de la altura

TEOREMA CXXV.—**El área lateral de un tronco de cono** (en función de la altura) **es igual al producto de la alt. por la ⊙ que tiene por radio la parte de la ⊥ construída en el punto medio de la generatriz y comprendida entre ésta y el eje.**

Dem.) Sea el tronco de cono CABD. (Fig. 382).

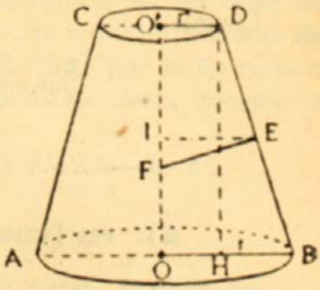


Fig. 382

$DH \perp OB$

$OO' = DH = h.$

$EB = ED$

$EF \perp BD$

$EF = \rho$ (corta al eje OO' en F)

$EI \parallel OB \parallel O'D.$

$EI = \dfrac{r+r'}{2}$ (por ser la mediana del trapeci OBDO')

$\triangle EIF \sim \triangle DHB.$

Tienen: $\measuredangle I = \measuredangle H = 90°.$

$\measuredangle FEI = \measuredangle BDH$ (Por tener sus lados ⊥s)

Luego: $\dfrac{EI}{DH} = \dfrac{EF}{BD}$

o sea: $\dfrac{\frac{1}{2}(r+r')}{h} = \dfrac{\rho}{g}$

$\dfrac{1}{2} g\ (r+r') = \rho\, h \mid \cdot 2\pi$

$\pi\, g\ (r+r') = 2\, \pi\, \rho\, h.$

El primer miembro representa el área lateral del tronco de cono, en función de la generatriz.

El segundo miembro, también, representa el área lateral, pero en función de la altura.

$$\therefore \quad \boxed{S_{tr.\,cono} = 2\pi \, \rho \, h}$$

§ 7.—*AREA DE LA ESFERA*

TEOREMA CXXVI.—**El área de una esfera es igual al cuádruplo del área de un círculo máximo.**

Tes.) $S_e = 4 \pi R^2$

Demostración.— Sea **ABCDEFG** una línea poligonal regular inscrita en la circunferencia de radio **OA** = **OG**. (Fig. 383).

Al hacer girar esta línea poligonal en torno del diámetro **AG**, se generan diversos cuerpos:

AB genera un cono de altura **AH**.

BC genera un tronco de cono de altura **HI**.

CD genera un tronco de cono de altura **IO**.

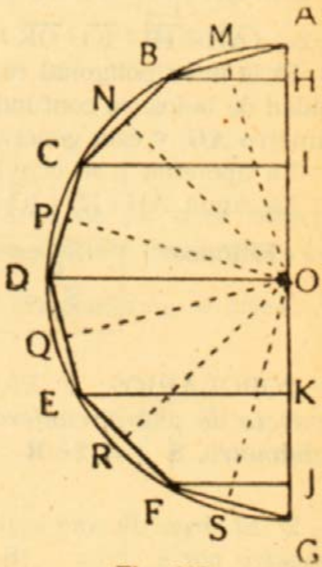


Fig. 383

DE genera otro tronco de altura **OK**.

EF genera también un tronco de cono de altura **KJ**.

FG genera un cono de altura **JG**.

(También podría resultar un cilindro si una cuerda fuese || al eje).

Como la línea poligonal es regular, todas las apotemas son iguales: $OM=ON=OP=OR=OS=\rho$.

La línea poligonal regular entera, genera un cuerpo cuya área S es equivalente a la suma de las áreas laterales de los diversos conos y troncos de conos.

Por consiguiente:

$$S=2\pi\rho\cdot\overline{AH}+2\pi\rho\cdot\overline{HI}+2\pi\rho\cdot\overline{IO}+2\pi\rho\cdot\overline{OK}+2\pi\rho\cdot\overline{KJ}+2\pi\rho\cdot\overline{JG}$$

$$=2\pi\rho\,(\overline{AH}+\overline{HI}+\overline{IO}+\overline{OK}+\overline{KJ}+\overline{JG})$$

Si la línea poligonal regular está formada por una infinidad de lados, se confunde con la semi circunferencia de diámetro **AG**, y ésta genera entonces la superficie esférica.

La apotema ρ se convierte en el radio $OA=OG=R$.

La suma $AH+HI+IO+OK+KJ+JG = 2R$.

Entonces: $$\boxed{\begin{array}{l} S_e = 2\pi R\cdot 2R \\ S_e = 4\pi R^2 \end{array}}$$

COROLARIOS: 1º *El área de una esfera es igual al producto de una circunferencia máxima de la esfera, por el diámetro.* $\mathbf{S_e = 2\pi R \cdot d}$.

2º *El área de una esfera es igual al cuadrado de su diámetro por π.* $\mathbf{S_e = \pi d^2}$.

TEOREMA CXXVII.—**El área de una zona esférica es igual al producto de una circunferencia máxima por la altura de la zona.**

Sea la zona generada por el arco AB y de altura $EF = h$. (Fig. 384).

Tes.) $S_z = 2\pi R \cdot h.$

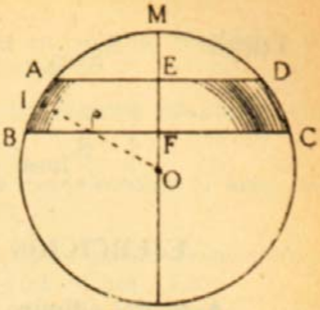


Fig. 384

Dem.) El área lateral del tronco de cono generado por la cuerda AB, es $= 2\pi\rho \cdot h$.

Si se considera el arco AB, formado por una infinidad de cuerdas sucesivas, desde A hasta B, el área engendrada por AB será la zona y ρ se convertirá en el radio R.

Luego: $\boxed{S_z = 2\pi R \cdot h.}$

TEOREMA CXXVIII.—**El área de un huso esférico es igual al producto de un círculo máximo de la esfera por la razón** $\frac{\alpha}{90^\circ}$. (α = áng. rectilíneo correspondiente al diedro del huso). (Fig. 385).

Tes.) $S_{huso} = \pi R^2 \cdot \frac{\alpha^\circ}{90^\circ}$

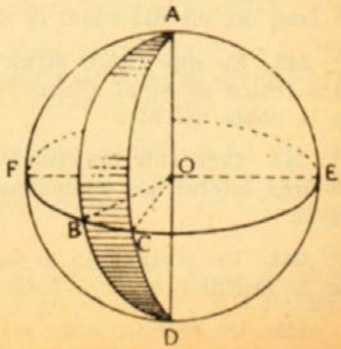


Fig. 385

Dem.) Considerando la superficie de la esfera como un huso completo y el ángulo rectilíneo correspondiente de 360°, y aplicando el teorema CXXVI, se tiene:

$S_{huso} : 4\pi R^2 = \alpha^\circ : 360^\circ$

Luego: $$S_{huso} = 4\pi R^2 \cdot \frac{\alpha^\circ}{360^\circ} = \pi R^2 \cdot \frac{\alpha^\circ}{90^\circ}$$

$$\boxed{S_{huso} \;\pi\; R^2 \cdot \frac{\alpha^\circ}{90^\circ}}$$

EJERCICIOS DE APLICACION

Area del cilindro

• **238.** ¿Cuál es el área lateral de un cilindro cuyo radio basal es 2,55 m y su altura igual a los $\frac{3}{5}$ de la circunferencia basal?

• **239.** Calcular el radio basal de un cilindro de revolución cuya área lateral es 48,30 m^2 y su generatriz 7 m.

240. El radio de la base de un cilindro es 0,35 m y la altura es el duplo del diámetro de la base.
Calcúlese el área del cilindro.

241. El área total de un cilindro de revolución es $182{,}80\pi$ El área del círculo basal es $49{,}96\pi$. Calcúlese la altura.

• **242.** En qué razón están las áreas laterales de dos cilindros rectos de igual altura y cuyo radio basal de uno de ellos es el doble del otro.

• **243.** Construir un cilindro de altura dada g, de modo que su área lateral sea equivalente a la suma de las áreas de sus bases.

• **244.** Un rectángulo de lados a y b, gira en torno del lado a. Calcular el área total del cuerpo generado.

245. Un cilindro cuya altura es igual al diámetro tiene de área total 1 m^2. ¿Cuál es su altura?

Area del cono

246. Calcular el área lateral de un cono de revolución cuya generatriz es 10 y cuyo radio basal es 6.

* 247. Calcular el área total de un cono de revolución cuya generatriz es 15 y su altura 12.

248. En un cono recto $g : h = 5 : 4$. Calcular el área lateral y el área total del cono si $h = 8{,}4$ m.

* 249. Calcular el área total de un cono de revolución sabiendo que su radio basal es 8,4 y su altura 11,2.

250. Calcular el área lateral de un cono de revolución cuya circunferencia basal es igual a $7{,}8\ \pi$ y su altura igual 5,2.

* 251. La generatriz de un cono de revolución tiene una inclinación de 45° sobre la base. Calcular el área total, sabiendo que la generatriz es igual $10\sqrt{2}$.

252. ¿Cuál es el área lateral de un cono recto, cuyo radio basal es 1,40 m y la generatriz es igual a los $\frac{5}{7}$ de la circunferencia de la base?

253. ¿Cuál es el área lateral de un cono recto sabiendo que la generatriz mide 3 m y la altura igual al diámetro basal?

* 254. ¿En qué razón están el área lateral de un cono recto con su área basal, 1º si la generatriz es igual al diámetro basal; 2º si su altura es igual al diámetro basal?

* 255. En un cono de revolución, la sección plana que pasa por la cúspide y su eje es un triángulo equilátero. Calcular el área total: 1º en función de su altura **h**; 2º en función del radio **r** de la base.

* 256. Un cilindro de 8 m de altura está inscrito en un cono cuya generatriz mide 15 m y la altura 12 m. Calcular el área total del cilindro..

• 257. Determinar el área del cuerpo que se genera por la rotación de un cuadrado: 1º en torno de una de sus diagonales; 2: alrededor de una paralela a una diagonal que pasa por un vértice del cuadrado.

258. La sección plana que pasa por la cúspide y el eje de un cono recto es un triángulo rectángulo isósceles, de hipotenusa 1,8 m. Calcular el área lateral de este cono.

259. En un cono recto la altura mide 40 cm; calcular el área total sabiendo que $g : r = 5 : 3$.

Area del tronco de cono

• 260. ¿Cuál es el área lateral de un tronco de cono recto cuya generatriz es 3 m y los radios de las bases paralelas $r = 2{,}8$ m y $r' = 2{,}1$ m?

• 261. Calcular la superficie total de un tronco de cono recto sabiendo que su altura es 4,5; el diámetro de la base inferior es 18 y el de la superior 6.

262. ¿Cuál es el área lateral de una cuba cuyo diámetro de fondo es 2,10 m, el de su abertura 2,30 y su generatriz 3,84?

263. Determinar el área de un tronco de cono recto, sabiendo que la generatriz es 6 m y la suma de las circunferencias de las bases paralelas 8,48 m.

• 264. El radio de la base de un cono recto es 6 m y su altura 12 m. A 4 m de distancia de la cúspide se hace pasar un plano paralelo a la base. ¿Cuál es el área total del tronco?

• 265. Calcular el área total de un tronco de cono de revolución, si sus radios basales son 10 y 4 y su altura 8..

266. En un tronco de cono recto el radio de la base inferior es 5, el de la base superior 2; el ángulo de inclinación que forma la generatriz sobre la base es 45°. Calcular el área total.

267. Calcular el área lateral de un tronco de cono recto, sabiendo que su sección central tiene un área a^2 y que la generatriz es el duplo de la altura.

Area de la esfera

268. Calcular el área de una esfera de 3 cm de radio.

* **269.** Calcular el área de una esfera cuyo diámetro mide 1,2 m.

270. Si el área de una esfera es 10,24 π. ¿Cuál es su radio?

* **271.** El área total de un cubo es 8,64 m^2. Calcular el área de la esfera inscrita en él.

* **272.** Determinar el área de la esfera circunscrita a un cubo de arista $a = 4\sqrt{3}$ m.

* **273.** El área de una esfera es equivalente al área de un cubo cuya arista mide 4 m.

Calcular el radio de la esfera.

* **274.** Determinar la relación que existe entre el área de una esfera y el área lateral del cilindro circunscrito a ella.

275. Determinar el radio de la esfera circunscrita a un tetraedro regular de arista **a**, en función de dicha arista.

* **276.** Dado un cono de revolución de altura **h** y radio basal **r**, calcular el radio **R** de la esfera inscrita a este cono y tangente al círculo basal.

277. Calcular la circunferencia de un círculo máximo de una esfera cuya área es 36 m^2.

* **278.** Probar que las superficies de dos esferas son entre sí como los cuadrados de los radios o de sus diámetros.

279. ¿En qué razón están el área de una esfera y el área total del cilindro circunscrito a ella?

280. ¿En qué razón están las áreas de una esfera y del cono equilátero circunscrito a ella?

281. Calcular el radio de una esfera cuya área es equivalente a la suma de las áreas de dos esferas de radios 9 y 12 respectivamente?

282. Calcúlese el área de la tierra, si el radio $R = 6370$ Km.

283. Dado un tetraedro regular de arista 12 m. ¿Cuál es el área de la esfera circunscrita?

284. Construir un círculo cuya área sea equivalente al área lateral de un tronco de cono de altura $h = 10\sqrt{15}$ cm y cuyos radios basales son: $r = 25$ cm y $r' = 15$ cm.

285. Calcular el área de una zona esférica cuya altura es 6 y el radio de la esfera 10.

286. ¿Cuál es el área interior y exterior de una esfera hueca, sabiendo que su espesor es de 0,04 m y el diámetro de la circunferencia exterior es 0,60 m?

* **287.** Calcular el área total de un casquete esférico de 0,8 m de altura, en una esfera de 2.10 m de radio.

* **288.** Calcular la altura de un casquete esférico de 3 m², en una esfera de 1 m de radio.

* **289.** El área de un casquete esférico es 2.261952 m² y su altura 0,45 m. Calcular el área de la esfera correspondiente.

290. El área de una zona esférica es 5,4 m². ¿Cuál es el radio de la esfera, sabiendo que la altura de la zona es 1,8 m?

291. El área de una esfera es 144 π y la de una zona de la misma esfera es 33,6 π. ¿Cuál es la altura de la zona?

292. ¿En qué tanto por ciento habrá que disminuir el radio R de una esfera para que la superficie de ésta: a) disminuya en el 20%? b) ¿En qué tanto % hay que aumentar el radio para que la superficie aumente en el 40%?

• **293.** Una esfera se corta por dos planos paralelos a las distancias 4 y 8 del centro, respectivamente. Calcúlese la zona resultante, si el radio de la esfera es 12. (**Dos casos**).

• **294** Calcular el área de un huso esférico cuyo ángulo rectilíneo es 30°, sabiendo que el radio de la esfera es 6.

295. Calcular el ángulo rectilíneo correspondiente a un huso esférico cuya área es $24 \frac{2}{5}$ cm², sabiendo, además, que la esfera a la cual pertenece dicho huso, tiene 180 cm² de área.

296. Calcular el área total de un segmento esférico en función del radio **R** de la esfera a la cual pertenece, y a la altura **h** del segmento, conociéndose, además, el radio r de la base menor. (**Los tres casos**).

CAPITULO XXIII

DETERMINACION DEL VOLUMEN DE LOS CUERPOS GEOMETRICOS

Volumen de un cuerpo es la extensión que ocupa, considerada en sus tres dimensiones (largo, ancho y alto o profundidad).

La palabra **volumen** *se emplea con frecuencia para designar el número que lo mide.*

Medir un volumen es compararlo con otro volumen elegido como unidad. Este último volumen es la **unidad de medida.**

La **unidad de volumen** es un cubo cuya arista mide la unidad de longitud.

Son unidades de volumen el m³, el dm³, etc.

El m³ es un cubo cuya arista mide un m o 10 dm o 100 cm. ¿Qué es dm³? ¿cm³?

§ *1.—VOLUMEN DEL PRISMA*

TEOREMA CXXIX.—**El volumen de un paralelepípedo rectangular es igual al producto de las tres aristas que concurren a un mismo vértice,** (o sea es igual al producto de los números que miden las tres dimensiones).

Demostración.— Sea el paralelepípedo de la Fig. 386 cuyas tres aristas concurrentes en B, miden:

BA=6 cm (largo); BC=5 cm (ancho); BF=4 cm (alt.)

La altura BF se divide en 4 partes iguales (cada parte =1 cm) y por los puntos de división, se hacen pasar planos paralelos a las bases; se determinan cuatro paralelepípedos congruentes, (Misma base e igual altura de 1 cm).

El área de la base de cada uno de ellos=6 cm. 5 cm=30 cm².

En cada cm² se puede colocar o construir 1 cm³ y en toda la base 30 cm³, quedando todos a la altura de 1 cm.

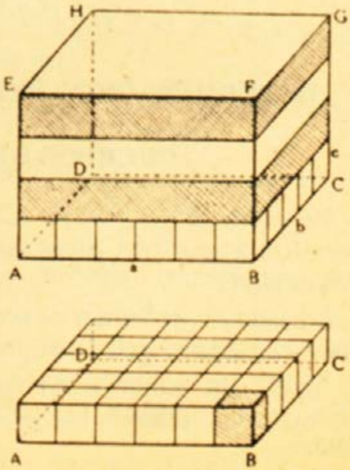


Fig. 386

El volumen de cada paralelepípedo parcial = 6 cm · 5 cm · 1 cm = 30 cm² · 1 cm = 30 cm³.

El volumen del paralelepípedo total$=30$ cm^3 $\cdot$ 4 $=$ 120 cm^3$=6$ cm largo $\cdot$ 5 cm ancho $\cdot$ 4 cm alto.

Generalizando y designando las aristas por **a** (largo), **b** (ancho), **c** (alto), resulta:

$$\boxed{\mathbf{V = a \cdot b \cdot c\ [cm^3]}}$$

COROLARIOS: 1º *El volumen de un paralelepípedo rectangular es igual al producto de la base por su altura.*

Dem.) En la fórmula anterior del volumen, a . b$=$B (área de la base y c$=$h (altura).

$$\boxed{V_p = B \cdot h}$$

2º *El volumen de un cubo es igual al cubo de su arista.*

Dem.) En el cubo las tres aristas son iguales. Designando la arista por a se tiene:

$$\boxed{V_{cubo} = a^3}$$

3º *El volumen de todo paralelepípedo recto es igual al producto de la base por su altura.* **(La base puede ser cualquier paralelógramo).**

Dem.) Dicho paralelepípedo se puede transformar en otro de base rectangular equivalente y de igual altura.

TEOREMA CXXX.—**El volumen de un paralelepípedo oblicuo, es igual al producto de la base por la altura.**

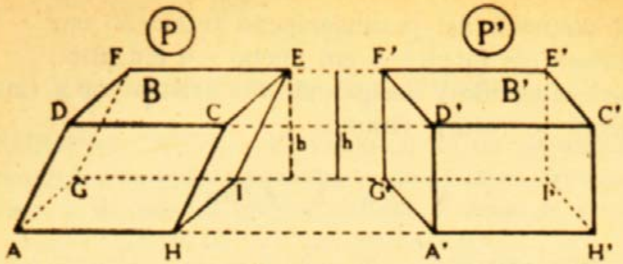


Fig. 387

Dem.) Sea P el paralelepípedo oblicuo.

DCEF = B = base.

Su altura = **h.** (Fig. 387).

Se prolonga la arista **FE** y las demás aristas paralelas a ella.

Se hace F'E' = FE.

Por F' y E' se construyen los planos F'A' y E'H', perpendiculares a F'E'.

Resulta un paralelepípedo recto P', en el cual la cara F'A', es una sección recta del paralelepípedo oblicuo P y F'E' = arista FE.

Entonces: P' = P. (Teor. CII).

Designando la base **D'C'E'F'** = B', y la altura **F'G' = h**, se tiene:

$$P' = B' \, . \, h \qquad \text{(Teor. CXXIX, corol. 1º).}$$

$$P' = B \, . \, h \qquad (B' = B)$$

$$\text{Luego:} \quad P = B \, . \, h \qquad \text{(Por ser } P' = P)$$

TEOREMA CXXXI.—**El volumen de un prisma cualquiera** (recto u oblicuo) **es igual al producto de su base por su altura.**

1º Se hace la demostración para un prisma de base triangular.

2º Para un prisma de base cualquiera.

1º Volumen del prisma triangular. Sea el prisma triangular recto **AHCDEF** de altura AD=h y de base AHC=b. Fig. 388.

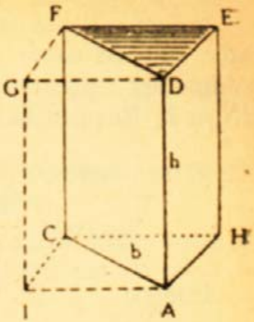


Fig. 388

Por los puntos **F** y **D** se hacen pasar **planos paralelos** a las caras AE y CE, respectivamente.

Se forma así el paralelepípedo recto D—AHCI de altura **h** y de base **AHCI**=B.

Volumen paral D—AHCI=B · h=2 b · h (B=2b).

Prisma AHC—DEF≅prisma ACI—DFG (Igual base y altura).

Luego:

$$\text{Vol. pr. AHC—DEF} = \frac{1}{2}\text{Vol. D—AHCI} = \frac{1}{2}B \cdot h = b \cdot h$$

2º Volumen de un prisma de cualquier base.—

Si la base del **prisma recto** es **un polígono** cualquiera, se descompone el prisma en prismas triangulares, por medio de **planos diagonales** que pasan todos por una misma arista lateral. (Fig. 389).

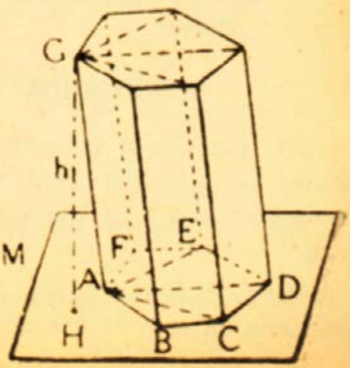


Fig. 389

Se calcula el volumen de

cada uno de estos prismas triangulares. Se suman los volúmenes parciales y se saca como factor común la altura **h**. Resulta la tesis.

O sea que:

$$V_{\text{pr. recto}} = b_1h + b_2h + b_3h + \dots + b_n \cdot h$$
$$= (b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n)\, h.$$

Luego: $$\boxed{V_{\text{pr. recto}} = B \cdot h}$$

COROLARIOS: 1º *El volumen de un prisma cualquiera* (recto u oblicuo) *es igual al producto de una arista lateral por su sección recta.*

Dem.) Ver teoremas CXXX y CXXXI.

2º *Dos prismas son entre sí como los productos de las bases por sus alturas.*

3º *Dos prismas de igual altura y de distintas bases son entre sí como sus bases.*

4º *Dos prismas de bases equivalentes son entre sí como sus alturas.*

EJERCICIOS DE APLICACION

297. Calcular el volumen de un cubo sabiendo que su arista es: 1º 0,7; 2º $2\sqrt{3}$; 3º $a\sqrt{b}$.

• **298.** Calcular el volumen de un cubo cuya diagonal es $5\sqrt{3}$.

• **299.** Calcular el volumen de un cubo si, 1º una de sus caras tiene un área de 961 m²; 2º la diagonal de una cara $= 8$.

300. ¿Cuál es el volumen de un cubo cuya área total es: a) 13,5 m²?; b) S cm²?

* **301.** Calcular el volumen de un cubo sabiendo: 1º que el perímetro de su plano diagonal es 2s; 2º que el área de su plano diagonal es a^2.

302. ¿En qué % aumenta el volumen de un cubo, si cada una de sus aristas aumenta en el 20%?

* **303.** Calcular el volumen de un paralelepípedo recto que mide 3 m de largo, 5 de ancho y 4 m de alto.

* **304.** Un paralelepípedo recto de base rectangular tiene un área total de 148 m^2. Calcular su volumen sabiendo que las dimensiones de la base son 6 m y 5 m.

305. Una sala de clase que tiene la forma de un paralelepípedo rectangular, la diagonal mide 14,5 m y las tres dimensiones son entre sí como los números 3 : 6 : 7. ¿Cuál es el volumen de aire contenido en esta sala?

* **306.** El área total de un paralelepípedo rectangular es 248 m^2. Su volumen es 240 m^3 y su altura 4 m. Calcular las dimensiones de la base.

* **307.** ¿Cuánto debe medir la arista de una fosa cúbica para que su capacidad sea doble de otra cuya arista mide 2,20 m?

308. Dos cubos de latón miden 15 cm y 24 cm de arista; si se funden juntos, ¿Cuál será la arista del nuevo cubo equivalente a la suma de los anteriores?

309. Calcular el volumen de un paralelepípedo rectangular cuya área total es 184 m^2 y cuya base tiene como dimensiones 8 y 5 m.

310. El volumen de un paralelepípedo rectangular es 405 m^3; las dimensiones de la base son 10 y 9 m. ¿Cuál es la superficie total?

311. Se desea transformar un cubo de 8 m de arista en un paralelepípedo rectangular cuya base mide 16 m de largo por 8 m de ancho. ¿Qué altura debe tener el paralelepípedo?

312. Si la arista de un cubo es **a.** ¿Cuánto medirá la de un cubo de doble volumen?

313. En un paralelepípedo rectangular las dimensiones de la base son entre sí como 1 : 2. La altura es 2,4 m y la superficie total es 43,2 m^2. ¿Cuál es su volumen?

314. En un paralelepípedo rectangular las aristas concurrentes a un mismo vértice suman $9 \frac{1}{4}$ m si el volumen es 27 m^3 y la altura es el medio geométrico de las dimensiones basales, ¿cuáles son las dimensiones del paralelepípedo?

315. La arista basal de un prisma recto regular triangular mide 6 m y la altura 5 m. Calcular su volumen.

316. El volumen y el área total de un paralelepípedo rectc rectangular están expresados por el mismo número. Se pide calcular la altura del paralelepípedo, sabiendo que una de las aristas basales mide 8 m y que la diagonal de la base es igual a 10 m.

• **317.** Calcular el volumen de un prisma recto triangular regular de 4 m de altura y de 3,75 de perímetro basal.

318. Las aristas basales de un prisma triangular recto son 9 m, 5m y 6 m. Calcular su volumen si su altura es 3 m.

• **319.** La base de un prisma recto es un triángulo rectángudo de catetos 5 y 8 m respectivamente. El volumen es 6,90 m^3. Calcular el área lateral.

320. Calcular el volumen de un prisma recto triangular cuya altura es 8 m y cuya base es un triángulo ABC de lados $a=6{,}40$ m, $c=5$ m y ángulo $\beta=30°$.

321. Calcular el volumen de un prisma recto hexagonal sabiendo que su altura es 6 m y que cada arista basal mide $2\sqrt{3}$ m.

322. El volumen de un prisma recto hexagonal es $90\sqrt{3}$ m^3; cada una de sus aristas basales mide 6 m. Calcular la superficie lateral.

323. El volumen de un prisma recto hexagonal regular es $120\sqrt{3}$ m^3; su altura es 5 m. Calcular el lado del hexágono de la base.

324. Un prisma recto tiene por base un hexágono regular, inscrito en una circunferencia de radio 6 m. Su altura es igual al diámetro de la circunferencia circunscrita a la base. Calcular el volumen.

* **325.** Un prisma recto tiene por base un octógono regular, inscrito en una circunferencia de radio 8. Calcular su volumen, sabiendo que su altura es igual al lado del cuadrado inscrito en la circunferencia anterior.

326. Un prisma oblicuo tiene por base un rombo cuyo lado mide 10 m y el ángulo agudo 30°.

La arista lateral mide 20 m y tiene una inclinación de 30° sobre el plano de la base. Calcular el volumen del prisma.

327. La base de un prisma oblicuo es un rombo cuyas diagonales miden 8 y 12 m, respectivamente. La arista lateral mide 20 m y forma un ángulo de 45° con la base. Calcular el volumen del prisma.

328. Un estanque tiene la forma de un prisma octogonal regular de 8 m de perímetro. ¿Cuál es el volumen de agua que contiene cuando ésta se eleva a 0,75 m?.

329. Un paralelepípedo oblicuo tiene por base un rectángulo cuyos lados contiguos miden 4 y 5 m. La arista lateral forma un ángulo de inclinación de 60° y su proyección sobre la base es igual a 3 m. ¿Cuál es su volumen?

§ 2.—*VOLUMEN DE LA PIRAMIDE*

Para calcular el volumen de una pirámide cualquiera se parte del volumen de un tetraedro o pirámide triangular, y para determinar el volumen de esta última, se parte del *teorema de Eudoxio.*

TEOREMA CXXXII.—(Teorema de Eudoxio, 370 A. de C.) .—**Todo prisma triangular puede descomponerse en tres tetraedros o pirámides equivalentes.**

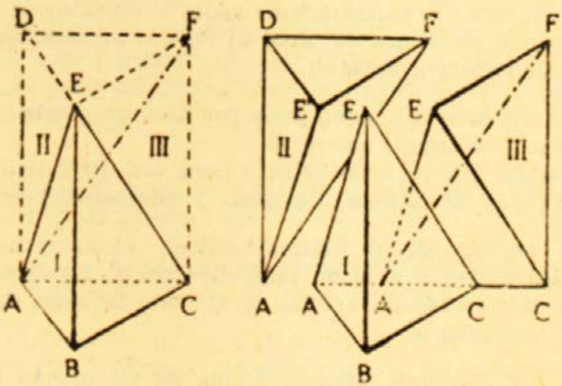


Fig. 390

Tes.) I=II=III.

Dem.) Sea el prisma **ABCDEF** (Fig. 390).

Por el vértice E y la arista AC, se hace pasar un plano.

El prisma queda dividido en dos pirámides: una **triangular, E—ABC=I** y la otra **rectangular, E—ACFD.**

En esta 2º pirámide se hace pasar otro plano por el vértice E y la diagonal AF de la base. Resultan las pirámides triangulares E—AFD=II y E—AFC=III.

Pero: II=III. (Igual base AFD=ACF y misma altura común desde cúspide E, a estas bases. Teor. CVIII).

También: II=I. (Igual base: DEF=ABC e igual altura, la del prisma).

Luego: I=III=II (1) (Q. E. D.)

COROLARIO: *Un tetraedro o pirámide triangular, es equivalente a la tercera parte de un prisma triangular de igual base y altura.*

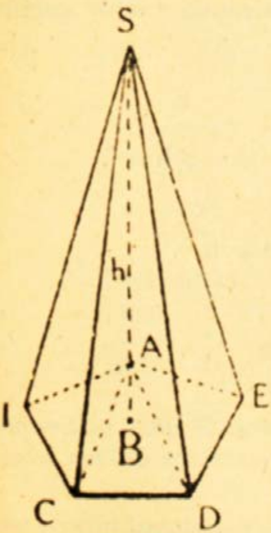


Fig. 391

TEOREMA CXXXIII.—**El volumen de una pirámide cualquiera es igual a un tercio del producto de su base por su altura.**

Tes.) $\mathbf{V_{pi} = \frac{1}{3} B\, h.}$

Dem.) La demostración se hace: 1º para una pirámide de base triangular; 2º para una pirámide de base cualquiera.

1º **Pirámide triangular.—Sea b** la base y **h** la altura de la pirámide.

Se completa la pirámide en un prisma triangular de misma base y altura.

(1) La 1ª vez se consideró la pirámide II con base DAF y la cúspide opuesta E., para compararla con la pirámide III.

La 2ª vez se consideró la pirámide II con la base DEF y de cúspide A, para compararla con I.

Resulta:

Vol. prisma = bh.

$$V_{pi} = \frac{1}{3} V_{pr} = \frac{1}{3}\ bh.$$ (Corol. teor. **CXXXII**, pág. **539**).

2º **Pirámide de base cualquiera.**—Sea la base un polígono cualquiera **AICDE = B** (Fig. 391) y su altura h.

Se descompone la pirámide en pirámides triangulares por medio de planos que pasan por la cúspide y por las diagonales de la base que parten de uno de sus vértices.

Se calcula el volumen de cada pirámide triangular y se suman los diversos volúmenes, sacando factor común $\frac{1}{3}h.$:

$$V_{pi} = \frac{1}{3} b_1 h + \frac{1}{3} b_2 h + \frac{1}{3} b_3 h + \ldots + \frac{1}{3} b_n h =$$

$$\frac{1}{3} (b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n)\ h.$$

Resulta: $$\boxed{V_{pi} = \frac{1}{3}\ B\ h.}$$

COROLARIOS: 1º *Los volúmenes de dos pirámides cualesquiera son entre sí como los productos de sus bases por sus alturas respectivas.*

2º *Los volúmenes de dos pirámides de igual altura son entre sí como sus bases.*

3º *Los volúmenes de dos pirámides de bases equivalentes son entre sí como sus alturas.*

4º *Los volúmenes de dos pirámides semejantes son entre sí como los cubos de dos líneas homólogas cualesquiera.*

Dem.) Sean los tetraedros semejantes P y P'. (Fig. 392)

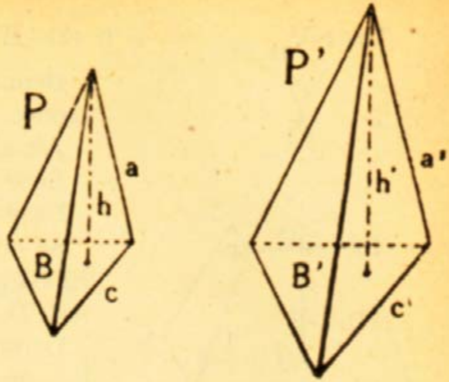


Fig. 392

$$V_1 = \frac{1}{3} B \cdot h$$

$$V_2 = \frac{1}{3} B' \cdot h'$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{1}{3} Bh}{\frac{1}{3} B'h'} = \frac{Bh}{B'h'}$$

$$\text{Pero: } \frac{B}{B'} = \frac{c^2}{c'^2} = \frac{a^2}{a'^2}$$

$$\text{y} \quad \frac{h}{h'} = \frac{c}{c'} = \frac{a}{a'}$$

Multiplicando miembro a miembro, resulta:

$$\frac{Bh}{B'h'} = \frac{c^3}{c'^3} = \frac{a^3}{a'^3} = \frac{{}^1/_3\, Bh}{{}^1/_3\, B'h'}$$

$$\text{O sea: } \frac{V_{\text{pir.}}}{V'_{\text{pir.}}} = \frac{c^3}{c'^3} = \frac{a^3}{a'^3}$$

§ *3.—VOLUMEN DE UN TRONCO DE PIRAMIDE*

TEOREMA CXXXIV.—**El volumen de un tronco de pirámide de bases paralelas es igual a un tercio del producto de su altura, por la suma de las dos bases y de la media geométrica entre ellas.**

Tes.) $V_{tr.\,pi} = \frac{1}{3}h\,(B+B'+\sqrt{BB'})$

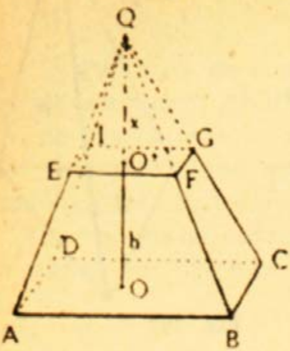


Fig. 393

Dem.) Sea ABCD—EFGI el tronco de pirámide. (**Fig. 393**).

Altura **OO'=h**.

Base inferior=**B**.

Base superior=**B'**.

Se completa el tronco **ABCD** EFGI en la pirámide total Q—ABCD.

Denotando la altura QO', de la pirámide complementaria por **x**, resulta:

$$V_{tr.\,pi} = \text{Vol. Q ABCD}-\text{Vol. Q EFGI.}$$

$$V_{tr.\,pi} = \frac{1}{3}B(h+x)\ \frac{1}{3}-B'x$$

$$V_{tr.\,pi} = \frac{1}{3}Bh+\frac{1}{3}Bx-\frac{1}{3}B'x$$

$$V_{tr.\,pi} = \frac{1}{3}Bh+\frac{1}{3}x(B-B') \quad (1)$$ **(sacando factor común x).**

Como en la última igualdad no se conoce el valor de **x,** se calcula este valor en la siguiente igualdad y se introduce en la ecuación precedente.

$$\frac{B}{B'} = \frac{(h+x)^2}{x^2}$$ (**Corol. 3º de Teor. CVI, pág. 477**).

$$\therefore \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{B'}} = \frac{h+x}{x}$$

$$x\sqrt{B} = h\sqrt{B'} + x\sqrt{B'}$$

$$x(\sqrt{B} - \sqrt{B'}) = h\sqrt{B'}$$

$$x = \frac{h\sqrt{B'}}{\sqrt{B} - \sqrt{B'}} = \frac{h\sqrt{B'}(\sqrt{B} + \sqrt{B'})}{(\sqrt{B} - \sqrt{B'})\ (\sqrt{B} + \sqrt{B'})} =$$

$$\frac{h(B' + \sqrt{BB'})}{B - B'}$$

$$V_{tr.\,pi} = \frac{1}{3}Bh + \frac{1}{3} \cdot \frac{h(B' + \sqrt{BB'})}{B - B'} \cdot (B - B')$$ (Se reemplazó x en [1].

$$V_{tr.\,pi} = \frac{1}{3}Bh + \frac{1}{3}h\ (B' + \sqrt{BB'})$$

$$\boxed{V_{tr.\,pi} = \frac{1}{3}h\ (B + B' + \sqrt{BB'})}$$

COROLARIO: *Un tronco piramidal de bases paralelas se puede descomponer en tres pirámides de misma altura que el tronco y cuyas bases son, respectivamente, las bases del tronco de pirámide y la media geometría de ellas.*

§ 4.—*VOLUMEN DE UN POLIEDRO CUALQUIERA*

Para calcular el volumen de un **poliedro cualquiera**, se descompone en prismas y pirámides, cuyas dimensiones y volúmenes se determinan sucesivamente.

PROBLEMA 41.—*Calcular el volumen de un tronco de prisma recto cuya base* **B=40 cm²** *y cuyas aristas miden respectivamente* **GD=12 cm, GE=8 cm** *y* **AF=10 cm.** **(Fig. 394). (Ver definición de tronco de prisma, pág. 469).**

Si por el extremo **E** de la arista más corta se traza un plano **RES** paralelo a la base, el sólido dado queda dividido en un prisma recto ACD—RES=V_1 y una pirámide de cúspide E y base RSGF=**b**=V_2.

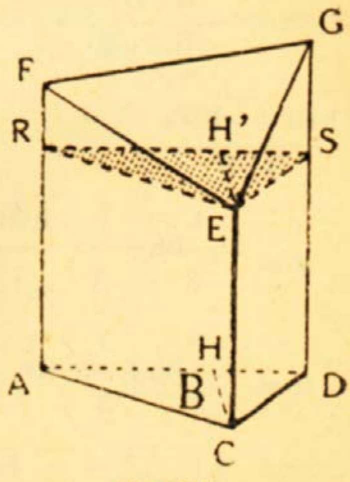


Fig. 394

El volumen del prisma es:

$V_1 = B \cdot CE = 40 \cdot 8 = 320\ cm^3$.

La base **b** de la pirámide =un trapecio rectángulo de altura **RS** y de bases **FR** y **GS**.

La altura de la pirámide = **EH'** = altura del △**ESR**, puesto que plano ESR ⊥ al plano del trapecio.

El volumen de la pirámide es, entonces:

$$V_2 = \frac{1}{3}\, b \cdot EH' = \frac{1}{3}\left(\frac{GS+FR}{2} \cdot RS\right) \cdot EH' =$$

$$\frac{1}{3}\left(\frac{4+2}{2} \cdot RS \cdot EH'\right). \qquad \text{(Se simpl. por 2)}$$

$$V_2 = \frac{1}{3}(3 \cdot RS \cdot EH') = \mathbf{1 \cdot RS \cdot EH'}. \quad \text{(Se simpl. por 3)}$$

Pero el producto $RS \cdot EH' = 2\triangle ESR = \mathbf{2B}$.

Luego: $V_2 = 40 \cdot 2 = \mathbf{80\ cm^3}$.

$$V_{\text{tronco prisma}} = V_1 + V_2 = 320\ cm^3 + 80\ cm^3 = 400\ cm^3$$

NOTA.—Repetir el cálculo para el caso en que la base del tronco de prima es **B** y la longitud de las aristas **m, n, p.**

$$\text{se obtiene: } \mathbf{V} = \frac{1}{3}\,\mathbf{B}\,(\mathbf{m} + \mathbf{n} + \mathbf{p}).$$

EJERCICIOS DE APLICACION

• **330.** Calcular el volumen de una pirámide triangular regular cuya arista basal es 6 m y su altura 3 m.

• **331.** Calcular el volumen de una pirámide triangular cuyas aristas basales son respectivamente 14 m, 12 m y 10 m, y su altura 6 m.

• **322.** Idem de una pirámide recta de base cuadrada cuya arista basal es 8 y la arista lateral 6.

• **333.** Idem de una pirámide recta de base cuadrada en la cual su apotema lateral es 10,5 y la arista basal es 16,8.

• **334.** Idem de una pirámide triangular regular sabiendo que su arista lateral mide 10 m y su altura 8 m.

• **335.** Calcular el volumen de un tetraedro regular, si se conoce: 1º su arista basal **a**; 2º su altura **h**; 3º su apotema lateral ρ.

336. ¿Cuánto mide la arista lateral de una pirámide recta de base cuadrada, si su altura es 7 m y su volumen 15,75 m^3?

337. Calcular el volumen de una pirámide hexagonal regular, si la arista basal es 4 y su altura 9.

338. ¿Cuál es el volumen de una pirámide regular hexagonal cuya arista lateral es 8 y el ángulo de inclinación sobre la base 30°?

339. ¿Cuál es el volumen de una pirámide regular hexagonal si cada uno de sus ángulos diedros de la base vale 45° y su altura es $4\sqrt{3}$?

340. Idem, si la pirámide es de base cuadrada.

341. Calcular el volumen de una pirámide regular hexagonal, sabiendo que la arista lateral mide 8 m y que su proyección sobre la base es 6, 4.

342. En una pirámide recta regular hexagonal la arista lateral mide 25 cm. y su altura 20 cm. Calcular: a) el volumen; b) la superficie total.

• **343.** Calcular el volumen de una pirámide triangular, sabiendo que las aristas basales son 13, 14 y 15, respectivamente, y que una de las aristas laterales es 1,5 y su proyección sobre la base 0,9.

344. La altura de una pirámide es 9. Calcular el volumen sabiendo que su base es un rombo cuyas diagonales miden 8 y 6.

• **345.** Calcular la arista de un tetraedro regular cuyo volumen es: 1º 144 $\sqrt{2}$ m^3; 2º 1 m^3; 3º v m^3.

• **346.** Calcular el volumen de una pirámide que tiene su base cuadrada y cuyas caras laterales son triángulos equiláteros, si, además, se sabe que su arista basal mide 10 cm.

347. Determinar el volumen y el área total de un octaedro regular de arista **a**.

* 348. En una $\odot$ de 10 cm de radio se inscribe un triángulo equilátero. ¿Cuál sería el volumen de la pirámide que tuviera por base dicho triángulo y 12 cm de altura?

349. A un tercio de la longitud de las aristas laterales, medidas desde el vértice, se corta una pirámide por un plano paralelo a la base. ¿Qué parte de la pirámide completa es la pirámide desprendida?

350. ¿A que distancia de la cúspide debe cortarse una pirámide, por planos paralelos a la base para que resulte dividida: 1º en dos partes equivalentes; 2º en tres partes equivalentes.

* 351. ¿Cuál es el volumen de una pirámide truncada de bases paralelas, cuya base inferior tiene un área de 144 m^2, la superior 81 m^2 y la altura 15 m?

352. Calcular el volumen de un tronco de pirámide regular de bases cuadradas y paralelas, cuyos lados son 9 m y 4 m, respectivamente; si la altura del tronco es 15 m.

353. Calcular el volumen de un tronco de pirámide triangular regular, sabiendo que la arista de la base inferior es 6, la de la base superior 4, y la altura del tronco $6\sqrt{3}$.

* 354. Las aristas basales de un tronco de pirámide de bases paralelas y cuadradas son 3 m y 2 m, respectivamente. Determinar el volumen de dicho tronco, si la altura de la pirámide complementaria es 1,2 m.

355. En un tronco de pirámide recta regular hexagonal la arista lateral mide 40 cm, sus aristas basales miden, respectivamente, 40 y 16 cm. Calcúlese el volumen y el área total del tronco de pirámide.

356. El volumen de un tronco de pirámide triangular regular de bases paralelas es 49 m^3. La arista de la base inferior es $3\frac{1}{3}\sqrt[3]{27}$ m y la de la base superior es $2\sqrt[3]{27}$ m. Calcular el volumen de la pirámide completa.

Resp. = 62,5 m^3.

357. El volumen de un tronco de pirámide de bases cuadradas y paralelas es 50,8 m^3; su altura es 1,2 m. ¿Cuál es el volumen de la pirámide completa, si la arista de la base menor es 6 m?

358. Calcular el volumen de un tronco de prisma recto cuya área basal$=$**B** y la longitud de las aristas **m, n, p.**

$$R. = \frac{1}{3} \mathbf{B} \ (m+n+n+p)$$

359. Calcular el volumen de un tronco de prisma recto triangular cuyas aristas laterales son respectivamente: 4 m, 6 m y 8 m; la arista basal$=6\sqrt{3}$. Calcular el volumen del tronco y la altura de una pirámide equivalente y de misma base.

360. Un tronco de prisma recto tiene por base un triángulo equilátero de lado **a**; sus aristas miden respectivamente: a, 2.a, 3a. Calcular su volumen y área total.

Resp.: $$V = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}; \ S = \frac{a^2}{4} (24 + \sqrt{15} + \sqrt{3})$$

361. Un tronco de prisma recto tiene por base un cuadrado de lado **a**; dos aristas tienen por longitud común **a** y las otras dos **2.a** Calcular el volumen y área total.

362. ¿Cuál es el volumen de un tronco de pirámide hexagonal regular de bases paralelas, sabiendo que las aristas basales son 0,60 m y 0,20 m y la altura 2m?

• **363.** Un tronco de pirámide triangular regular tiene: Volumen $95\sqrt{3}$ cm^3; arista de la base inferior 6 cm; altura 15 cm. Calcúlese el área de la base superior.

364. En un tronco piramidal triangular regular se tiene: base inferior$=10{,}24$ m^2; base superior$=6{,}25$ m^2; altura$=4{,}20$ m. ¿Cuál es el volumen de la pirámide complementaria o deficiente?

365. El volumen de un tronco de pirámide es **v**; la altura es **h**; la base superior=**b**. Calcúlese la base inferior.

366. En un tronco de pirámide de bases paralelas, la base inferior=**B**; la base superior=**B'**; la altura de la pirámide complementaria o deficiente=**h**. Calcular el volumen del tronco.

367. En un tronco de pirámide de bases paralelas se tiene: base inferior=**B**, base superior=**B'**, la altura de la pirámide entera=**h**. Calcúlese el volumen del tronco.

368. En un octaedro regular calcular: a) el volumen conocida su área $72a^2\sqrt{3}$ cm²; b) su área conocido su volumen $81\sqrt{3}$ cm³.

II.—VOLUMEN DE LOS CUERPOS REDONDOS

§ 5.—*VOLUMEN DEL CILINDRO*

TEOREMA CXXXV.—**El volumen de un cilindro recto es igual al producto de su base por la altura.**

Tes.) $V_{cil} = \pi r^2 g$.

Dem.) Se puede considerar el cilindro como un prisma de una infinidad de caras laterales.

Luego para obtener su volumen basta aplicar la fórmula del volumen de un **prisma recto:** $V_{pr} = B \cdot h$.

Como en el cilindro recto $\mathbf{B} = \pi\, \mathbf{r^2}$ y $\mathbf{h} = \mathbf{g}$ resulta directamente la tesis.

Luego: $$\boxed{V_{cil} = \pi\, r^2\, g.}$$

COROLARIO.—*El volumen de un cilindro cualquiera* (recto u oblicuo) *es igual al producto de su base por su altura*:

$$\mathbf{V_{cil} = \pi\, r^2 \cdot h.}$$

Dem.) El volumen de un prisma cualquiera es igual al producto de la base por su altura. (Teor. CXXXI, pág. 532).

§ 6.—*VOLUMEN DE UN CONO*

TEOREMA CXXXVI.—**El volumen de un cono de revolución es igual a un tercio del producto de su base por su altura.**

Tes.) $V_{cono} = \frac{1}{3}\pi\, r^2 \cdot h.$

Dem.) El *cono* se puede considerar como una *pirámide de una infinidad de caras laterales* o una pirámide en estado límite. Para tener su volumen basta aplicar la fórmula del volumen de la pirámide: $V_{pi} = \frac{1}{3} B \cdot h.$

Como en el cilindro $B = \pi\, r^2$, resulta:

$$\boxed{V_{cono} = \frac{1}{3}\pi\, r^2\, h.}$$

§ 7.—*VOLUMEN DE UN TRONCO DE CONO*

TEOREMA CXXXVII.—**El volumen de un tronco de cono de altura h y cuyas bases tienen por radios r y r' tienen por expresión:**

$$\mathbf{V}_{\text{tr.cono}} = \frac{1}{3}\pi\,\mathbf{h}\,(\mathbf{r}^2+\mathbf{r}'^2+\mathbf{rr}').$$

Dem.) El tronco de cono es un tronco de pirámide en estado límite.

Su volumen se obtiene por la fórmula del volumen del tronco de pirámide: $V_{\text{tr. pi}} = \frac{1}{3} h\,(B+B'+\sqrt{BB'})$

Las bases B y B' se reemplazan por las áreas de los respectivos círculos basales: $B=\pi r^2$; $B'=\pi r'^2$.

Luego:

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{V}_{\text{tr. cono}} &= \frac{1}{3}\,\mathbf{h}\,(\pi\,\mathbf{r}^2+\pi\mathbf{r}'^2+\pi\mathbf{rr}') \\ V_{\text{tr. cono}} &= \frac{1}{3}\pi\,h\,(r^2+r'^2+rr') \end{aligned}}$$

OBSERVACION.— El volumen de cualquier prisma o cilindro, pirámide, cono y la esfera, se puede obtener también, aplicando el **principio de Cavaliere**, pág. 471.

§ 9.—*VOLUMEN DE LA ESFERA*

TEOREMA CXXXVIII.—**El volumen de una esfera es igual a un tercio del producto de su radio por su área.**

Tes.) $V_e = \frac{4}{3} \pi R^3$

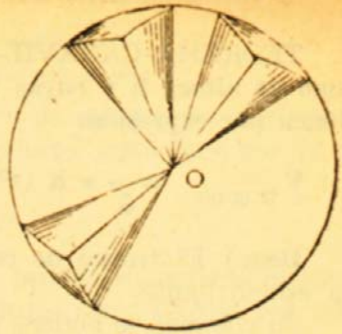


Fig. 395

1ª **Dem.)** Se considera la superficie esférica dividida en una infinidad de partes, infinitamente pequeñas: b_1, b_2, b_3. . ., b_n.

Sobre cada una de estas partes infinitesimales de la superficie esférica, considerada como base, se construyen pirámides cuyas cúspides se encuentran en el centro. (Fig. 395.

Todas estas pirámides tienen la altura igual al radio de la esfera.

La suma total de sus bases equivale a la superficie esférica, y la suma de sus volúmenes es equivalente al volumen de la esfera.

Denotando los volúmenes de las pirámides por V_1, V_2, V_3. . ., V_n y el volumen de la esfera por V_e se tiene:

$$V_1 = \frac{1}{3} b_1 R \qquad \text{(Teor. CXXXIII).}$$

$$V_2 = \frac{1}{3} b_2 R$$

$$V_3 = \frac{1}{3} b_3 R$$

. . . .

$$V_n = \frac{1}{3} b_n R$$

Sumando y sacando factor común $\frac{1}{3}$ R, resulta:

$$V_e = V_1 + V_2 + V_3 + \ldots + V_n = \frac{1}{3} R (b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n)$$

$$V_e = \frac{1}{3} R \cdot 4 \pi R^2$$

Luego:

$$\boxed{V_e = \frac{4}{3} \pi R^3}$$

Volumen de la esfera en función de su diámetro "D".

Se tiene: $R = \frac{D}{2}$

Se reemplaza R en la fórmula anterior:

$$V_e = \frac{4}{3} \pi \left(\frac{D}{2}\right)^3 = \frac{4}{3} \pi \frac{D^3}{8} = \frac{1}{6} \pi D^3$$

Luego:

$$\boxed{V_e = \frac{1}{6} \pi D^3}$$

COROLARIO.—*Los volúmenes de dos esferas son entre sí como los cubos de sus radios o los cubos de sus diámetros.*

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{R^3}{R'^3} = \frac{D^3}{D'^3}$$

2º DEMOSTRACION DEL VOLUMEN DE LA ESFERA (Fig. 396).

Se parte del método para determinar el volumen de un poliedro.

Se considera un poliedro regular circunscrito a una esfera. (**Todas sus caras planas son tangentes a la esfera**).

Este poliedro se puede descomponer en tantas pirámides regulares como caras tenga el poliedro dado, teniendo todas ellas el centro de la esfera por cúspide común y el radio **R** de la misma por altura.

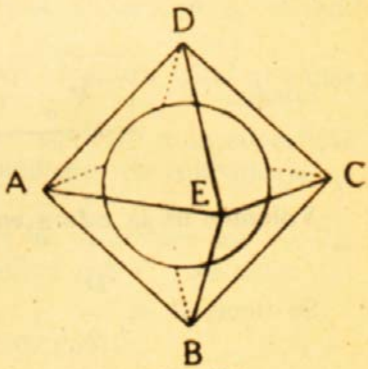


Fig. 396

Ahora bien, el volumen de estas pirámides elementales es igual al producto de su base por $\frac{1}{3}$ **R.**

Designando las bases de las pirámides por b_1, b_2, b_3... b_n, el

$$V_{pol.} = \frac{1}{3} R(b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n)$$

Si por medio de planos tangentes a la esfera se van cortando sucesivamente los ángulos poliedros de sus vértices, el poliedro circunscrito irá aumentando el número de sus caras **hasta convertirse en el límite, en una esfera.**

Y en este caso, el volumen y el área del poliedro serán iguales a los de la esfera.

Reemplazando la superficie $b_1+b_2+b_3+\ldots+b_n$ por $4\pi R^2$, resulta:

$$V_{pol.} = V_e = \frac{1}{3} R \cdot 4\pi R^2 = \frac{4}{3}\pi R^3$$

3ª DEMOSTRACION DEL VOLUMEN DE UNA ESFERA (1)

Para calcular el volumen de la esfera, por este método, se parte del cálculo del volumen del cuerpo engendrado por algunas figuras planas al girar alrededor de un eje fijo.

TEOREMA CXXXIX.—**El volumen engendrado por un $\triangle$ que gira alrededor de un eje trazado por uno de sus vértices, en su plano y sin cortarlo, es igual al tercio del producto del área engendrada por el lado opuesto al vértice situado en el eje, por la altura correspondiente a dicho lado.**

Sea el $\triangle ABC$ que gira alrededor del eje XY. Se traza la altura BH=h y la perpendicular AD=**R** al eje de rotación.

Pueden ocurrir dos casos:

1.er CASO.—El eje XY coincide con un lado del triángulo. (Fig. 397).

El volumen engendrado por el $\triangle ABC$= suma de los volúmenes de los conos engendrados por los $\triangle$s rectángulos ABD y ACD. Resulta entonces:

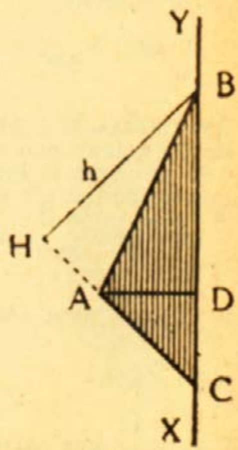


Fig. 397

(1) Este método para calcular el volumen de una esfera, da una idea como pueden determinarse las áreas y volúmenes de los cuerpos, engendrados por la rotación de figuras planas en torno de un eje situado en el mismo plano de dichas figuras.

$$V_{ABC} = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot \overline{BD} + \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot \overline{CD} =$$

$$\frac{1}{3}\pi R^2 \, (\overline{BD} + \overline{DC}).$$

$$V_{ABC} = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot \overline{BC} = \frac{1}{3}\pi R \cdot R \cdot BC$$

$R \cdot \overline{BC}$ = duplo del área $\triangle ABC$ (=**prod. de base por alt.**)
$R \cdot BC = AC \cdot h.$

$$V_{ABC} = \frac{1}{3}\pi R \cdot \overline{AC} \cdot h$$

$$V_{ABC} = \frac{1}{3} h\pi \cdot R \cdot \overline{AC}$$

Pero $\pi \cdot R \cdot \overline{AC}$ = área lateral del cono ACD engendrada por el lado AC.

Luego: $V_{ABC} = \frac{1}{3}$ **área engendrada por $\overline{AC} \cdot h$.**

2º CASO.—El $\triangle$ **ABC** no tiene sino un vértice común con el eje. (**Fig.** 398).

Se prolonga el lado AC hasta su encuentro con el eje en D. Resulta:

$$V_{ABC} = V_{ABD} - V_{CBD}$$

$$V_{ABC} = \frac{1}{3} \text{ área (AD)} \cdot \overline{BH} - \frac{1}{3} \text{ área (CD)} \cdot \overline{BH}.$$

$$V_{ABC} = \frac{1}{3} [\text{área (AD)} - \text{área (CD)}] \cdot \overline{BH}.$$

Luego:

$$V_{ABC} = \frac{1}{3} \text{ área (AC)} \cdot \overline{BH}.$$

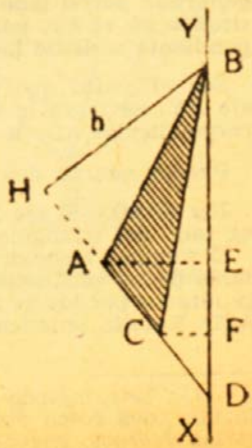


Fig 398

OBSERVACION.—El caso en que AC llega a ser paralelo al eje **XY**, (Fig. 399) puede considerarse como un caso límite del precedente, que subsiste cuando el punto D se aleja indefinidamente sobre el eje.

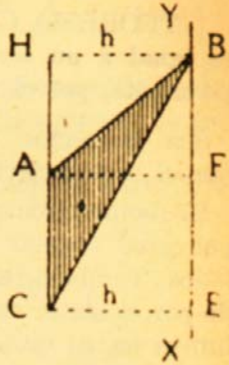


Fig. 399

TEOREMA CXL.—**El volumen engendrado por un sector poligonal regular que gira alrededor de un diámetro exterior al mismo, es igual a un tercio del producto del área que engendra la línea poligonal regular por la apotema de la misma.** (Fig. 400).

Sea **OABCD** un sector poligonal regular que gira alrededor de **XY**.

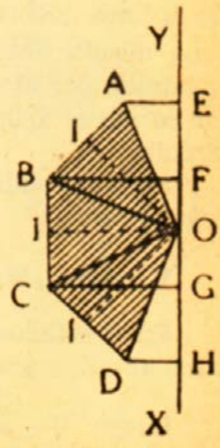


Fig. 400

Se tiene:

$$V_{AOB} = \frac{1}{3} \text{ área } AB \cdot OI$$

$$V_{BOC} = \frac{1}{3} \text{ área } BC \cdot OI$$

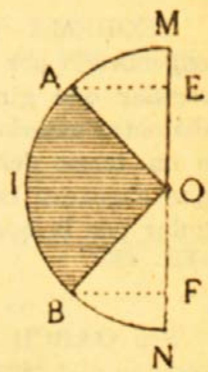
$$V_{COD} = \frac{1}{3} \text{ área } CD \cdot OI$$

$$V_{OABCD} = \frac{1}{3} (\text{área } AB + \text{área } BC + \text{área } CD) \cdot OI$$

§ 9.—*VOLUMEN DE UN SECTOR ESFERICO*

TEOREMA CXLI.—**El volumen de un sector esférico es igual a un tercio del producto de la zona correspondiente, por el radio de la esfera.**

Sea el sector esférico engendrado por el sector circular **OAB.** (Fig. 401).



El sector circular **OAB** es un sector poligonal regular de una infinidad de lados. También, el volumen engendrado por el sector circular **OAB,** es el volumen en su estado límite, del engendrado por el sector poligonal regular, al aumentar indefinidamente los lados de la línea quebrada.

La misma fórmula del volumen engendrado por el sector poligonal regular se puede aplicar al volumen engendrado por el sector circular.

Pero el volumen engendrado por el sector poligonal regular es:

$$\mathbf{V} = \frac{1}{3}\mathbf{S} \cdot \rho \quad (\mathbf{S} = \text{área engendrada por línea polig.; } \rho = \text{apot.})$$

En el estado límite, **S**=zona correspondiente al sector circular=Z, y ρ=R.

$$\text{Luego: V} \cdot \text{sector esférico} = \frac{1}{3}\text{ área zona AIB} \cdot \text{R.}$$

$$\text{V} \quad " \quad " \quad = \frac{1}{3} \cdot 2\pi\,\text{Rh} \cdot \text{R}$$

$$\boxed{V_{\text{sect. esf.}} = \frac{2}{3}\,\pi\,R^2 \cdot h}$$

Volumen de la esfera.—La esfera se puede considerar como un sector esférico engendrado por la rotación de un semicírculo alrededor de su diámetro.

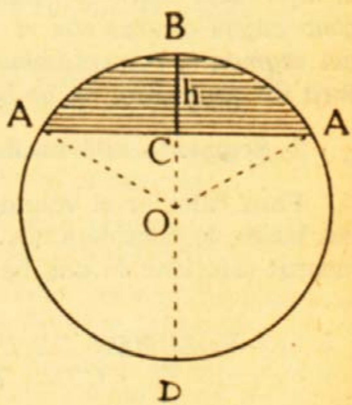
En este caso el área de la Zona=toda la superficie esférica$=2\pi R \cdot h = 2\pi R \cdot 2R = 4\pi R^2$.

Luego: $V_e = \frac{1}{3}\,4\pi\,R^2 \cdot R = \frac{4}{3}\,\pi\,\mathbf{R^3}$.

§ *10.—VOLUMEN DEL SEGMENTO ESFERICO*

1º **Segmento esférico de una base.**—

Sea el segmento esférico ABA' de altura CB=**h** en una esfera de radio **R**. (Fig. 402).



V. segm. esf. AA'B = V. sect. esf. AOA'B — V. cono AOA'.

V. segm. esf. AA'B $= \frac{2}{3}\,\pi R^2 h - \frac{1}{3}\,\pi \overline{CA}^2 \cdot \overline{OC}$.

(Vol. sect. esf. y cono).

Pero $\overline{CA}^2 = \overline{CB} \cdot \overline{CD} = h\,(2R - h)$.

$$V \cdot \text{segm. esf.} = \frac{2}{3}\,\pi R^2 h - \frac{1}{3}\,\pi h\,(2R-h)\,(R-h).$$

Haciendo los cálculos, resulta:

$$\textbf{V. segmento esf.} = \frac{1}{3} \pi h^2 (3 R - h).$$

Al resolver el paréntesis la fórmula precedente queda convertida así:

$$\boxed{\textbf{V. segmento. esf.} = R \pi h^2 - \frac{1}{3} h \pi h^2.}$$

De esta última fórmula se desprende que:

El volumen de un **segmento esférico** *es equivalente a la diferencia entre el volumen de un cilindro y el de un cono cuyas alturas son el radio de la esfera y la altura del segmento, respectivamente, y el radio basal es la altura del segmento, en ambos cuerpos.*

2º **Segmento esférico de dos bases.—**

Para calcular el volumen de un segmento esférico de dos bases, lo consideramos como la diferencia de dos segmentos esféricos de una base.

§ *11.—VOLUMEN DE UN INGLETE ESFERICO O CUÑA ESFERICA*

Sea α° = ángulo rectilíneo correspondiente al ángulo diedro del inglete.

R = radio de la esfera.

Como los volúmenes de dos ingletes de una misma es-

342 - 357 - 358 - 362 - 367 - 375 - 387

fera son entre sí como sus ángulos diedros correspondientes, se tiene:

$$V_{ing.} : \frac{4}{3}\pi R^3 = \alpha^\circ : 360.$$

$$\mathbf{V}_{\mathbf{ing.}} = \frac{4\pi \mathbf{R}^3\alpha}{\mathbf{3 \cdot 360}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\,\mathbf{R}\,\frac{\alpha^\circ}{\mathbf{90^\circ}}\,\pi\,\mathbf{R}^2$$

Resultado que se puede enunciar así:

"El volumen de un **inglete esférico** *es igual al producto de su área por un tercio del radio de la esfera".*

EJERCICIOS DE APLICACION

369. ¿Cuál es el volumen de un cilindro de revolución cuya altura es **b** y el radio basal **a**?

370. ¿Cuál es el volumen de un cilindro de revolución cuya circunferencia basal mide 8,06 π m y su altura 3 m?

371. Expresar en litros la capacidad de una cuba cilíndrica de 4,8 m de diámetro basal y 1,20 de profundidad.

372. ¿Cuántos m^3 de tierra se han removido al cavar un pozo de 2,8 de diámetro y 12 m de profundidad?

373. ¿Qué profundidad ha de tener un depósito cilíndrico de 12 m de radio basal que pueda contener 1440 π Hl?

374. De un estanque cilíndrico de 8,80 m de diámetro, salen 2 litros de agua por segundo. ¿De cuánto habrá bajado el nivel después de $^3/_4$ de hora?

375. Calcular el diámetro de los cilindros de un doble litro, un litro, medio litro, si el diámetro es igual a la altura?

376. Idem de las medidas cilíndricas de 1 l, 1 dl, 1 cl; si la profundidad es doble del diámetro.

?

377. Los diámetros basales de dos cilindros están en la razón de 8 : 6. Calcúlese el % de volumen que mide el menor con relación al mayor, sabiendo que la altura del menor es el 75% de la del mayor.

?

378. Calcular el volumen de un cilindro cuya área lateral es equivalente a la suma de las áreas laterales de dos cilindros de radio basales 4 y 6 cm, respectivamente, y sabiendo, además, que cada uno de ellos tiene una altura de 12 cm.

379. Calcular el volumen de materiales empleados en la construcción de una torre cilíndrica de 15 m de altura, si el muro tiene un metro de espesor y la circunferencia basal exterior mide 20. m.

* **380.** Un cubo está inscrito en un cilindro de 1 m de diámetro basal. ¿Cuál es la diferencia de volumen de los dos cuerpos?

* **381.** Si el área lateral de un cilindro recto es S. Calcular su volumen, sabiendo que el radio de la base $=c$.

* **382.** El volumen de un cilindro de revolución es 80 π y el diámetro de la base es 16. Calcular el área total.

383. Calcular el volumen de un tubo cilíndrico de altura g, y cuyo radio de la circunferencia basal exterior es $\mathbf{r}_1$, y el de la circunferencia interior, $\mathbf{r}_2$.

* **384.** Se quiere construir un cilindro equivalente a la suma de dos cilindros dados cuyos radios son 6 y 8 mts respectivamente. ¿Qué magnitud debe tener el diámetro del cilindro pedido, si los tres cilindros tienen la misma altura?

385. Un cubo de 1 m de arista es circunscrito a un cilindro. Calcular la diferencia de volumen.

* **386.** Calcular el volumen de un cono de revolución de altura 5 m y diámetro basal = 8,40m.

387. Idem de un cono de revolución cuya altura es 3,2 m y la generatriz 4 m.

• **388.** Idem de un cono de revolución cuya generatriz es 4,50 m y el diámetro de la base 5,40 m.

• **389.** Calcular el diámetro de la base de un cilindro de revolución de 9 m de altura y equivalente a un cono de 12 m de altura y 9 m de radio basal.

390. Calcular el volumen de un cono de revolución cuya altura es 4,5 y la circunferencia basal $= 1{,}6\ \pi$.

391. El volumen de un cono de revolución es 250 π; calcular su área lateral sabiendo que su altura es 7,50.

• **392.** ¿Cuál es el volumen de un cono de revolución cuya área total es 96π y su generatriz 10?

393. La altura de un cono recto es b metros y su radio basal c metros; si el radio basal aumenta en 20% y la altura disminuye en 25%. ¿En qué tanto % varía el volumen?

394. Un vaso cónico de 24 cm de diámetro basal y 18 cm de altura está lleno con agua. Si ésta se vierte en un vaso cilíndrico de 20 cm de diámetro y 11,52 cm de alto, ¿a qué % de la altura del cilindro llega el agua?

395. Calcular el volumen de un cono de revolución, dadas la generatriz $= 13$ m y el área lateral $= 135{,}2\ \pi$.

396. El área lateral de un cono de revolución es 7,2 π; el diámetro basal es 4,8. Calcular su volumen.

397. ¿Cuál es el radio de la base de un cono recto cuyo volumen es 1,6 m^3 y altura 0,80 m?

398. El radio de la base de un cono recto es 5 y su generatriz es igual a los $^2/_3$ de la ⊙ basal. Calcular: 1º, el volumen; 2º, el área lateral.

399. La generatriz de un cono recto es **a**. Calcular en función de la generatriz el área lateral y el volumen, sabiendo que la altura es equivalente a los $^{12}/_{13}$ de la generatriz.

• **400.** Por el punto medio de la generatriz de un cono, se hace pasar un plano paralelo a la base. ¿Qué parte del cono total es el cono complementario?

• **401.** Una vasija cónica de 20 cm de altura está llena de agua. ¿A qué altura llegará el líquido cuando se haya escurrido la mitad?

402. Calcular el volumen de un cono recto, sabiendo que la generatriz tiene una inclinación de 60° sobre el plano de la base, y la altura mide 9 m.

403. Calcular el volumen de un cono de revolución, sabiendo que el área de la base = B y que el área de una sección central = m^2.

• **404.** Las secciones centrales de un cono recto son triángulos equiláteros. Calcular el volumen del cono, dados: 1º el diámetro basal = **a**; 2º su altura **h**.

405. Calcular el volumen de un tronco de cono de revolución, si sus diámetros basales son 10 m y 8 m, respectivamente y su altura = 6 m.

• **406.** La generatriz de un tronco de cono de revolución de bases paralelas mide 15 m, el diámetro de la base inferior = 22 m, el de la base superior = 4 m. Calcular su volumen y el área total.

407. Los diámetros basales de un tronco de cono recto son entre si como 5 : 3. ¿En qué % aumenta el volumen de dicho tronco al aumentar el diámetro basal inferior en 40% y el superior en 20% y permaneciendo la altura constante?

407. En un tronco de cono recto hay inscrita una esfera de 10 cm de radio. Si la sección plana que pasa por el eje del tronco tiene un perímetro de 100 cm, calcular: a) el volumen del cuerpo que resulta al extraer la esfera del tronco de cono; b) el área total del mismo cuerpo; c) la razón entre los volúmenes del tronco de cono y la esfera.

• **409.** Calcular el volumen de un tronco de cono de revolución cuya generatriz mide 7,5 m, su altura 6 m. y el radio de la base inferior 6,5 m.

410. El volumen de un tronco de cono de revolución es 78 π. El radio de la base superior es 2 y la altura = 6. Calcular el radio de la base inferior.

411. Los radios basales de un tronco de cono recto son 9 cm y 4 cm. La generatriz es igual a la suma de los radios. ¿Cuál es el volumen?

412. ¿Cuál es la altura de un tronco de cono que tiene un volumen de 84 m^3, si la base superior = 3 m^2 y la inferior 12 m^2?

413. Dado un cono truncado recto de radios basales 3 m y 9 m, encontrar el radio de la base de un cilindro equivalente y de misma altura que el tronco del cono. ?

414. De un tronco de cono recto se conoce su volumen V y su altura h. Determinar los radios de las circunferencias basales, si están en el razón m : n. X

415. El diámetro de una esfera es 6. Calcular su volumen.

416. El volumen de una esfera es 288π. Calcular su diámetro.

417. El volumen de una esfera es 36 π. Calcular su área.

• 418. ¿Cuánto debe medir el radio de una esfera para que un mismo número exprese al mismo tiempo su volumen y área? ¿Cuál es ese número?

419. El área de una esfera es 225 π. ¿Cuál es el volumen?

420. Una esfera de radio R se corta por un plano perpendicularmente en el punto medio del radio. Calcular el volumen del cono recto que tiene por base dicha sección y por cúspide el centro de la esfera.

421. Probar que en todo cubo se puede inscribir una esfera.

Determinar el centro de la esfera y calcular su radio en función de la arista "a" del cubo.

X 422. Calcular el volumen de una esfera circunscrita en un cubo, cuyo volumen es 216 cm^3.

4233. Calcular el volumen de una esfera inscrita en un cubo cuya área total es 150 cm^2.

• 424. En un cilindro recto cuya altura es igual al diámetro basal se hallan inscritos una esfera y un cono. Averiguar en qué razón están los volumenes de los tres sólidos. El cono tiene igual base y altura que el cilindro. (Problema de Arquímedes).

425. Calcular el radio de una esfera circunscrita a un tetraedro regular de arista **a**.

426. Dado un cono de revolución de radio basal r y altura h, calcular el radio R de la esfera inscrita en este cono y tangente al círculo de la base.

• 427. ¿Cuál es el volumen de una esfera, si la circunferencia de un círculo máximo mide 10π?

428. El volumen de una esfera es 32 cm^3. ¿Cuál es el área de un círculo máximo?

? 429. Calcular el volumen de un sector esférico que tiene por base 10 m^2 si el radio de la esfera es 12 m.

430. En una esfera de 1,20 m de radio se trazan dos planos secantes paralelos y simétricos con respecto al centro y distantes de 0,90. ¿Cuál es el volumen del segmento esférico?

431. Calcular el volumen de un segmento esférico de una base cuya altura es igual a 2 m y el radio de la esfera 10 m.

432. Calcular el volumen de un segmento esférico de una base cuya altura es 2 y el radio de la base 3.

433. Se da un cono de revolución de altura b y de radio basal a. Si en él se inscribe un cilindro cuya área total es

equivalente al área de la base del cono, calcular la altura y el radio basal del cilindro.

434. Calcular el área y el volumen de una esfera cuyo volumen es equivalente a la suma de los volúmenes de otras dos esferas cuyas áreas, de estas últimas, son a_1 y a_2, respectivamente.

435. La longitud de la circunferencia de un círculo menor de un esfera es 1. ¿Cuál es el volumen de la esfera si la distancia de dicho círculo al centro es h?

436. Dado un cono de revolución de altura 8 y radio basal 6, se traza un plano paralelo a la base, de manera que la superficie lateral del cono entero sea igual a la superficie total del cono complementario. Calcular el volumen de este último.

437. Se construye un cono de revolución dándole por área lateral la de un sector circular de 120° y radio R. Hallar el área total y el volumen de dicho cono.

438. El diámetro basal de un cilindro es igual a su altura. ¿Cuánto mide el diámetro, si el volumen es 8?

439. ¿Cuál es el volumen de un cono de revolución, cuya sección central es un triángulo equilátero de área $9\sqrt{3}$ m^2?

440. ¿Cuál es el ángulo del sector formado por el desarrollo de la superficie lateral de un cono de revolución de 4 m de circunferencia y 5 de generatriz?

441. El área lateral de un cono, desarrollada, forma un sector de 30°. La generatriz es 25. Calcular el radio basal.

442. El ángulo del centro de un sector circular es de 60° y su área 300 cm^2. Calcular el radio de una esfera equivalente al cono cuya área lateral es equivalente al sector circular.

443. Dado un cono que tiene 60 cm de altura y la misma longitud como radio de la base, se le inscribe una esfera de 10 cm de radio. 1° ¿Cuál será el volumen de la parte restante del cono? 2° ¿Cuál será el radio de la circunferencia de contacto la esfera y el cono, suponiendo que los puntos de contacto formen una circunferencia?

444. Demostrar que si un cilindro y un cono equilátero son circunscritos a una esfera, el volumen del cilindro es una media proporcional geométrica entre los volúmenes de la esfera y del cono.

445. Dado un cono de revolución de 6 m de altura y 8 m de radio basal, se traza un plano paralelo a la base que lo corta de tal manera que el área de la base superior del tronco es igual al área lateral del mismo. Calcular el volumen del cono complementario.

446. Calcular el volumen de un tetraedro: 1º inscrito en un cubo de arista **a**; 2º inscrito en una esfera de radio R.

447. Calcular el volumen de un octaedro regular, inscrito en una esfera de radio R.

448. Calcular en función de la arista **a** de un octaedro regular: 1º el radio de la esfera inscrita; 2º el radio de la esfera circunscrita.

449. Dado un cono de revolución de radio basal **r** y de altura **h**, calcular el radio de la esfera inscrita en este cono y tangente al círculo basal.

450. Las caras laterales de una pirámide de base cuadrada son triángulos equiláteros. La arista basal es **a**. Calcular en función de **a** el radio de la esfera inscrita.

451. De un tronco de revolución se dan los radios basales **r** y **r'** y la generatriz **g**. Determinar el radio de la esfera circunscrita.

452. Un cono es circunscrito a dos esferas que son tangentes exteriormente y cuyos radios son 4 y 12. Calcúlese el volumen del cono.

• **453.** Un triángulo equilátero de lado a se hace girar: 1º alrededor de una de sus alturas; 2º alrededor de uno de sus lados;

3º alrededor de la paralela a uno de sus lados que pasa por el vértice opuesto. Determinar en cada caso el volumen del cuerpo engendrado por la rotación [1].

454. Determinar el volumen del cuerpo engendrado por la rotación de un △ equilátero de lado a, alrededor de un eje que está situado fuera de él, y paralelo a uno de sus lados. Si la distancia del eje al lado paralelo es **b.**

• **455** un △ rectángulo de hipotenusa 15 cm y uno de sus catetos = 12 cm, gira en tono de un eje paralelo a este último y situado fuera del triángulo. Calcular el área lateral y el volumen del cuerpo engendrado por la rotación, sabiendo que la distancia del eje al cateto paralelo es igual a 1 cm.

456. Calcular el volumen del cuerpo que se engendra al hacer girar un cuadrado de lado a, en torno:

1º de una de sus diagonales;
2º de la paralela a una de las diagonales que pasa por uno de los vértices del cuadrado;
3º de la recta que une los puntos medios de dos lados contiguos.

457. Se hace girar un △ ABC en torno de su lado AB como eje. Calcular el volumen del cuerpo generado por la rotación, sabiendo que AB=25 cm; BC=20 cm y AC=15 cm.

458. Se hace girar un rectángulo de lados **a** y **b** alrededor de la paralela a una de las diagonales que pasa por un vértice del rectángulo. Calcular el volumen del cuerpo engendrado.

---

[1] Es útil recordar aquí las reglas de Gúlden sobre superficies y volúmenes de los cuerpos engendrados por la rotación de una figura plana alrededor de un eje:

1: **La superficie de un cuerpo de rotación, es igual al producto de la línea generadora por el camino recorrido por su centro de gravedad.**

2º **El volumen de un cuerpo de rotación, es igual al producto de la superficie generadora, por el camino recorrido por su centro de gravedad.**

459. Se hace girar un segmento circular, cuyo arco mide 60°, alrededor del diámetro paralelo a su cuerda. ¿Cuál es el volumen del cuerpo engendrado, si el radio del círculo al cual pertenece el segmento, es **r**?

460. Calcular el volumen del cuerpo engendrado por la rotación de un trapecio isósceles ABCD, alrededor de la base AB, sabiendo que AB=10; AC=6; AD=BC=5.

461. ¿Cuál es el volumen de un cuerpo engendrado por la rotación de un hexágono regular de lado **a**, que gira alrededor de uno de sus lados como eje?

462. Se da un rombo ABCD en el cual AB=a y el $\sphericalangle$DAB=60°; se hace girar dicha figura en torno de AC. Calcular el volumen del cuerpo engendrado por la rotación.

463. El lado de un rombo mide 10 cm y una de sus diagonales mide 16 cm. Se pide calcular el volumen del cuerpo que se engendra al girar el rombo alrededor de uno de sus lados.

464. Las coordenadas ortogonales de los vértices de un $\triangle$ ABC son: A(2,—4); B(4,—2) y C(4, 2). Se pide calcular el volumen del cuerpo que se genera al girar dicho $\triangle$ alrededor del eje de las ordenadas.

465. Los vértices de un cuadrilátero ABCD tienen, respectivamente las siguientes coordenadas: A(–8,–2); B(8,–2); C(2,6) y D(–2,6). Diga de qué clase de cuadrilátero se trata y calcule el volumen y el área total del cuerpo que se engendra al girar el cuadrilátero: a) en torno al eje de las ordenadas, b) en torno al lado AB; c) en torno al lado DC.

466. En un trapecio rectángulo la altura mide 3 cm. y la base mayor es el triple de la menor; si esta última mide 2 cm., calcular el volumen y el área total del cuerpo que se engendra al girar el trapecio: a) en torno a la base mayor; b) en torno a la base menor; c) en torno al lado $\perp$ a las bases.

467. En un sistema ortogonal las coordenadas de los vértices de un cuadrilátero son: A(2,3); B(6,–2); C(4,8) y D(2,6). Calcular el volumen del cuerpo engendrado al girar el cuadrilátero en torno del eje de las ordenadas.

468. En una semi ⊙ de radio **r** se halla inscrito un △ ABC, siendo el lado AB el diámetro de la ⊙ y AC igual a l_3. Calcular en función de **r** el volumen y el área total del cuerpo engendrado por la rotación del △ ABC alrededor: a) del lado BC; b) del lado AC; c) del lado AB.

X

APENDICE

TRANSFORMACIONES [1]

Traslaciones, Simetría, Homotecia

Definiciones Preliminares. —*Dada una figura* **(F)**, *por leyes diversas, se puede obtener otra figura* **(F')** *que esté en relación con la figura original, de modo que a un punto de la primera corresponda un punto de la segunda y viceversa. Cuando esto sucede, se dice que ha tenido lugar una* **transformación**.

Tipos de estas transformaciones son: *la traslación, la rotación, la simetría, la homotecia...*, etc...

Conviene hacer notar que en estas transformaciones, *las figuras se mantienen invariables*, tanto en su *forma* como en la *magnitud* de sus lados y ángulos.

Si la figura **(F')** *coincide* con la figura **(F)**, la *transformación es idéntica.*

Si a cada punto **M** de la figura **(F)** corresponde un punto **M'** de la figura **(F')**, *y uno sólo, la transformación es puntual.*

Si un punto **M** es homólogo de si mismo, es *un punto doble de la transformación.*

Si la misma ley que relaciona o hace corresponder a (F') con (F), relaciona a **(F)** con **(F')**, *la transformación es recíproca.*

---

(1) Antes de comenzar la presente materia conviene repasar el párrafo sobre "Elementos de Geometría Vectorial", página 209.

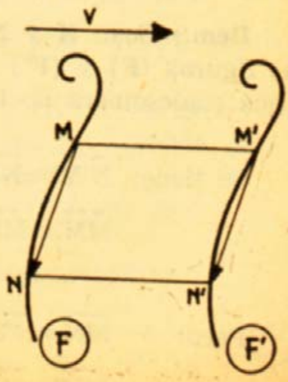
Si las figuras **(F)** y **(F')** resultan *congruentes*, se dice que *la transformación es un desplazamiento*.

Si una primera transformación hace corresponder la figura (F') con (F) y si una segunda transformación, hace corresponder la figura **(F")** con **(F')**, *la transformación única que hace corresponder a* **(F")** *con* **(F)** se dice que *es el producto de las dos transformaciones precedentes*.

§ *1.—TRASLACION*

Definición.—*Sean un vector* $\vec{\mathbf{V}}$ *y una figura* **(F)** *dados. Si a cada punto* **M** *de* **(F)** *se hace corresponder un punto* **M'** *tal que* $\overrightarrow{\mathbf{MM'}}=\vec{\mathbf{V}}$, *se obtiene una nueva figura (F'), la cual, se dice que viene o se deduce de la figura* **(F)** *por* **traslación.** Fig. 402.

El vector $\vec{\mathbf{V}}$ se dice que es el *vector traslación*.



Una traslación del vector $\vec{\mathbf{V}}$ se designa abreviadamente por: **traslación** $(\vec{\mathbf{V}})$.

Los puntos **M** y **M'** son *puntos homólogos* de las figuras **F** y **F'**.

Los vectores que unen dos puntos **M** y **N** de la figura **(F)** y sus homólogos **M'** y **N'** de la figura **(F')** son dos *vectores homólogos*.

Propiedades de la traslación.— *a) Dos vectores homólogos son equipolentes en dos figuras que se deducen una de la otra por traslación.*

Dem.) Sean **N** y **N'**, **M** y **M'** dos parejas de puntos homólogos de dos figuras **(F)** y **(F')** que se deducen una de la otra por traslación$(\vec{V})$. Fig. 402.

Resulta: $\overrightarrow{NN'}=\overrightarrow{MM}=\vec{V}$

y $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{A'M'}+\overrightarrow{M'M}$

$\overrightarrow{AM}=\vec{V}+\overrightarrow{A'M'}-\vec{V}$

Luego: $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{A'M'}$

Recíprocamente, para que dos figuras **(F)** y **(F')** se correspondan en una traslación, la *condición necesaria y suficiente* es que los *vectores sean equipolentes.*

Dem.) Sean **N** y **N'** dos puntos homólogos dados en las figuras **(F)** y **(F')** y **M** y **M'** otros dos puntos homólogos cualesquiera de las mismas figuras. (Fig. 402).

Se tiene: $\overrightarrow{N'M'}=\overrightarrow{NM}$ **(Los vectores homólogos son =s)**

$\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NN'}+\overrightarrow{N'M'}$ **(composición de vectores pág. 219).**

Pero: $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{N'M'}=0$ **(Relación de Chasles pág. 218)**

$\therefore$ $\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{NN'}$

Luego se puede pasar de **(F)** a **(F')** por la **traslación** $(\overrightarrow{NN'})$.

Esta propiedad es característica de la traslación.

b) *La traslación es un desplazamiento.*

Dem.) Sean **(F)** y **(F')** dos figuras homólogas en la **traslación** $(\vec{V})$; **A** y **A'**, **B** y **B'**, **C** y **C'**, tres parejas de puntos homólogos dados; **M** y **M'** una pareja de puntos homólogos cualesquiera. Fig. 403.

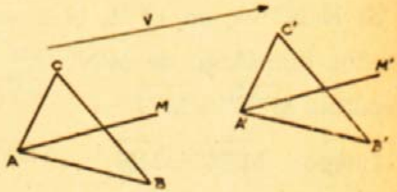


Fig. 403

La condición necesaria da:

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{A'C'};\ \overrightarrow{CB}=\overrightarrow{C'B'};\ \overrightarrow{BA}=\overrightarrow{B'A'}\ \text{y}\ \overrightarrow{AM}=\overrightarrow{A'M'}$$

Triedro ACBM$\cong$ triedro A'C'B'M' (tienen sus caras respectivamente$=$s).

Si se hace coincidir la cara CAB con la cara C'A'B' los dos triedros coinciden, AM toma la dirección de A'M' y como AM$=$A'M' M coincide con M.

Luego las dos figuras (F) y (F') son $\cong$s.

Luego la traslación es un desplazamiento.

NOTA.— Si las dos figuras son planas los Δs ACM y A'C'M' son congruentes. La superposición de AC con A'C' hace coincidir M con M'.

Producto de dos traslaciones.—Sea (**F'**) la figura homóloga de (**F**) en el vector traslación $\vec{\mathbf{V}}$. Sean $\overrightarrow{\mathbf{MN}}$ un vector de (**F**) y $\overrightarrow{\mathbf{M'N'}}$ su homólogo de (**F'**). Fig. 404.

Se tiene: $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{M'N'}$

Si $\overrightarrow{M''N''}$ es, en (**F''**), el vector homólogo de $\overrightarrow{M'N'}$, resulta: $\overrightarrow{M''N''} = \overrightarrow{M'N'}$

Luego: $\overrightarrow{M''N''} = \overrightarrow{MN}$

Siendo equipolentes dos vectores homólogos de (F) y (F'') se puede pasar por una traslación de (F) a (F'').

Además: $\overrightarrow{MM''} = \overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{M'M''} = \vec{V} + \vec{V'}$.

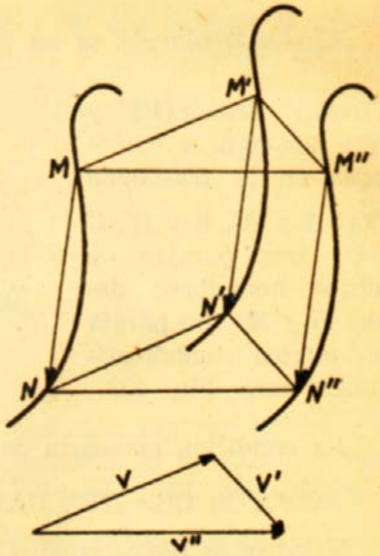


Fig. 404

De lo expuesto anteriormente se puede sacar la conclusión que: *el producto de dos traslaciones es una traslación cuyo vector traslación es la suma geométrica de los vectores componentes*. O sea: $\vec{\mathbf{V}}'' = \vec{\mathbf{V}} + \vec{\mathbf{V}}'$

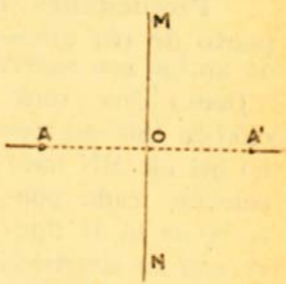
OBSERVACION.—La traslación es una transformación sin punto doble.

§ 2.—*SIMETRIA EN EL ESPACIO*

La simetría en el espacio se puede definir con relación: 1º *a una recta*; 2º *a un punto*; 3º *a un plano*.

a) Simetría con relación a una recta.—

Dos puntos **A** *y* **A'** *son simétricos* respecto de una recta **MN**, si esta recta es ⊥ en el punto medio **O** del segmento **AA'**. (Fig. 405).



La recta **MN** recibe el nombre de **eje de simetría**.

Figuras simétricas.—Si a a cada punto **A** de una figura **(F)**, se hace corresponder *su simétrico* **A'** respecto a un eje MN, se obtiene una *nueva figura* **(F')**, que es el L.G. de los puntos A' y que se dice es una *transformación de F por simetría, o figura simétrica* de la figura (F), respecto del eje MN.

La figura (F') es *independiente* del sentido que tenga el eje.

La simetría respecto a un eje es **una rotación de** $\pi + 2k\pi$ y alrededor de esta recta.

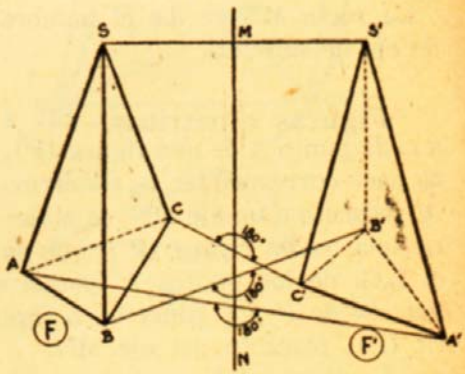
El valor de **k** puede ser cero o un número entero cualquiera. Si A y A' son dos puntos homólogos de dos figuras simétricas (F) y (F'), respecto al eje MN, y O el punto medio del segmento AA', el ∢ de rotación es el formado por los vectores $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OA'}$ y se indica por la notación: $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'})$.

Dicho ángulo es igual: $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}) = \pi + 2k\pi$ (expresado en radianes) [1].

Si $k = o$, $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}) = \pi = 180^\circ$

Propiedades de dos figuras simétricas respecto de un eje.— 1ª) *Dos figuras simétricas respecto de un eje son superponibles,* o sea, *son congruentes.*

Dem.) Una rotación de 180° en torno del eje MN hace coincidir cada punto A de la 1ª figura con su simétrico A' de la 2ª figura y así ambas figuras coinciden.



2ª) *La simetría respecto a un eje es una transformación recíproca.*

---

1) Radián es el ángulo del centro de un círculo cualquiera que subtiende entre sus lados un arco de longitud igual al radio. Es la unidad principal angular del sistema circular.

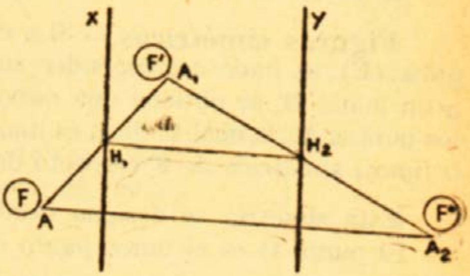
Un ∢ completo expresado en radianes es igual: $\dfrac{2\pi r}{} = 2\pi$ radianes.

$\therefore$ $360^\circ = 2\pi$ radianes; $180^\circ = \pi$ radianes $= 3{,}1416$ radianes

$\therefore$ 1 radián $= 180^\circ : 3{,}1416 = 57^\circ{,}296 = 57^\circ\ 17'\ 45''$.

Si (F') es simétrica de (F), (F) es simétrica de (F').

Productos de dos simetrías con relación a dos rectas.—Sean (F) una figura dada, (F') la figura homóloga de (F) respecto de la recta X; (F'') la figura homóloga de (F') respecto de la recta Y; A un punto cualquiera de (F) y A_1 su homólogo en (F'); (A_2) homólogo de (A_1) en (F'').



Los ejes X e Y son ||s.

Se tiene: $\overrightarrow{AH_1}=\overrightarrow{H_1A_1}$ y $\overrightarrow{A_1H_2}=\overrightarrow{H_2A_2}$

$$\therefore \quad \overrightarrow{AA_2}=\overrightarrow{AH_1}+\overrightarrow{H_1A_1}+\overrightarrow{A_1H_2}+\overrightarrow{H_2A_2}$$

$$\text{y} \quad \overrightarrow{AA_2}=2\overrightarrow{H_1A_1}+2\overrightarrow{A_1H_2}=2(\overrightarrow{H_1A_1}+\overrightarrow{A_1H_2})$$

Luego: $\overrightarrow{AA_2}=2\overrightarrow{H_1H_2}$

El vector $\overrightarrow{H_1H_2}$ es de magnitud y dirección constante. Se pasa de (F) a (F'') por la traslación $2\overrightarrow{H_1H_2}$.

El producto de dos simetrías respecto de dos rectas paralelas es una traslación.

Simetría con relación a un punto.—

Dos puntos **A** y **A'** *son simétricos* respecto de un punto **O**, si este punto está situado en el punto medio del segmento **AA'**.

El punto **O** es el *centro de simetría.*

Figuras simétricas.— Si a cada punto **A** de una figura (**F**) se hace corresponder su simétrico **A'** respecto a un punto **O**, se obtiene una *nueva figura* (**F'**), L. G. de los puntos A', la cual se dice, es *una transformación* de (F) o *figura simétrica* de F respecto de O.

Esta simetría se designa también, por **simetria (O).**

El punto **O** es el único *punto doble* de la transformación.

La simetría con relación a un punto es una *transformación recíproca.*

Si la figura (F) es plana y el centro de simetría O está situado en su plano, su figura simétrica (F'), tiene mismo sentido que (F) y ambas figuras *son superponibles,* pues, esta simetría equivale al caso de la simetría respecto de una recta $\perp$ al plano de (F) en el punto O.

Fuera de este caso, dos figuras simétricas respecto de un punto no son superponibles. Los elementos correspondientes (distancias, $\sphericalangle$s) son iguales pero dispuestos en sentido inverso.

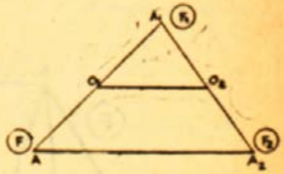
Producto de dos simetrías con relación a dos puntos.—Sean (F) una figura dada, (F_1) la figura homóloga de F respecto del punto O_1 y (F_2) homóloga de (F_1) en la simetría O_2.

Si A es un punto cualquiera de (F) y A_1 su homólogo en (F_1), y A_2 homólogo de A_1 en Fig. (F_2), se tiene sucesivamente:

$$\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{2O_1A_1} \text{ y } \overrightarrow{A_1A_2}=\overrightarrow{2A_1O_2}$$

$$\therefore\ \overrightarrow{AA_2}=\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{A_1A_2}=$$

$$2(\overrightarrow{O_1A_1}+\overrightarrow{A_1O_2})$$



Luego: $\overrightarrow{AA_2}=\overrightarrow{2O_1O_2}$

Se pasa de la Fig. (F) a la fig. (F_1) por una traslación de vector $\overrightarrow{2O_1O_2}$.

El producto de dos simetrías respecto a dos puntos es una traslación.

Las *figuras simétricas* de una figura dada *respecto de dos puntos* son *congruentes.*

Simetría con relación a un plano.—

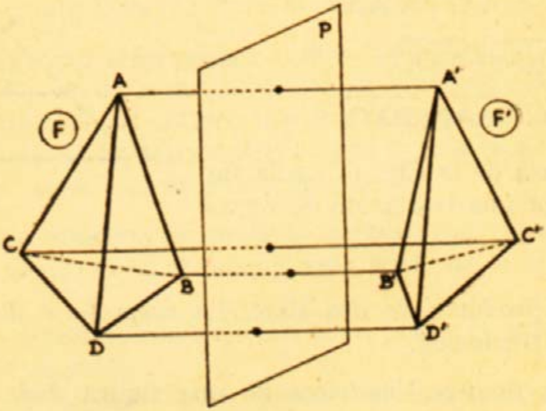
Dos puntos **A** y **A'** *son simétricos* respecto de un *plano* **P**, si este plano es $\perp$ al segmento **AA'** en su punto medio.

Figuras simétricas.—Si a cada punto **A** de una figura **(F)**, se hace corresponder su simétrico **A'** respecto a un plano **P**, se obtiene una *nueva figura* **(F')**, L. G. de los puntos **A'**, y que se dice *es transformación* de (F) *por simetría, o figura simétrica* de F respecto al plano P.

El plano **P** es el *plano de simetría.*

Todos los puntos del plano P son los *puntos dobles de la transformación*: Se consideran simétricos de sí mismos.

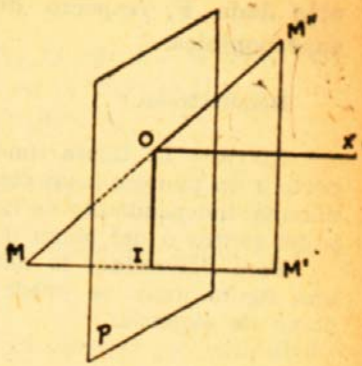
Esta es una transformación recíproca.



Dos figuras simétricas respecto *a un plano no son superponibles,* excepto el caso que sean planas y estén situadas en un plano ⊥ al plano de simetría.

Los elementos correspondientes (distancias, ∢s) son iguales pero dispuestos en sentido inverso.

TEOREMA 1.—**Dos figuras F' y F" respectivamente simétricas de una misma figura F respecto de un plano, son superponibles.**



Dem.) Sean M un punto de la figura F, M' y M'' sus simétricos respecto al plano P y al punto O.

Se traza $OX \perp P$.

El plano $MM'M'' \perp P$ (Teorema XCVIII).

$\therefore$ OX pertenece al plano MM'M'' y corta a M'M'' en su punto medio por ser O punto medio de MM'' y $OX \parallel MM'$.

$OX \perp M'M''$ por ser $\perp$ a su paralela OI.

$\therefore$ M' y M'' son simétricos respecto de OX.

Un giro de 180° alrededor del eje OX de la figura (F') la hará coincidir con (F'').

Luego F' y F'' son superponibles.

TEOREMA 2.—**Dos figuras simétricas, F' y F'' de una misma figura F, respecto de dos puntos O y O' cualesquiera, son superponibles.**

Dem.) En efecto, c/u de ellas es superponible a F''' figura simétrica de F respecto a un plano P que pasa por O' y O'.

TEOREMA 3.— **Dos figuras simétricas, F' y F'', de otra dada F con relación, respectivamente, a un plano P y a un punto O' exterior a este plano, son superponibles.**

Demuéstrese.

TEOREMA 4.— **Dos figuras simétricas, F' y F", de otra dada F, respecto de dos planos cualesquiera, son superponibles.**

Demuéstrese.

NOTA.— La figura simétrica de una figura dada con respecto a un punto o a un plano cualquiera, es una figura determinada, independiente de la clase de simetría (punto o plano) y del centro o del plano de simetría.

Para determinar la naturaleza de la figura simétrica de una figura dada, se puede elegir a voluntad el centro o el plano de simetría.

Elementos de simetría de una figura.— Una figura admite *un centro, un eje* o *un plano de simetría, si todos sus puntos son de dos en dos simétricos,* respectivamente, con relación a *dicho centro, eje o plano de simetría,* según la clase de simetría de que se trate.

a) Ejemplos: en la circunferencia y la esfera, **el centro de simetría** coincide con su centro; en un polígono regular coincide con el centro de la ⊙ circunscrita. Un paralelógramo y un paralelepípedo son simétricos respecto al punto de intersección de sus diagonales... etc...

b) **Son ejes de simetría** de sus respectivas figuras: el diámetro de un círculo; las rectas que unen los centros de gravedad de las caras opuestas de un cubo; la recta que une los puntos medios de las aristas opuestas de un tetraedro regular, etc...

c) **Son planos de simetría de sus respectivas figuras:** el plano que pasa por las aristas opuestas ||s de un cubo, todo plano meridiano de una superficie de revolución, cada plano que pasa por el punto medio, de dos aristas opuestas y por dos vértices de un octaedro regular, etc...

Aplicaciones.—) *La figura simétrica de una recta es otra recta.*

2) *La figura simétrica de un* ∢ *es otro* ∢ *igual*: tomando como centro de simetría su vértice, la figura simétrica es el ∢ opuesto por el vértice.

3) *La figura de un plano es otro plano.*

4) *La figura simétrica de un polígono plano es otro polígono igual al primero.*

5) *La figura simétrica de un diedro es otro diedro igual al primero pero de sentido contrario.*

§ 3.—HOMOTECIA [1]

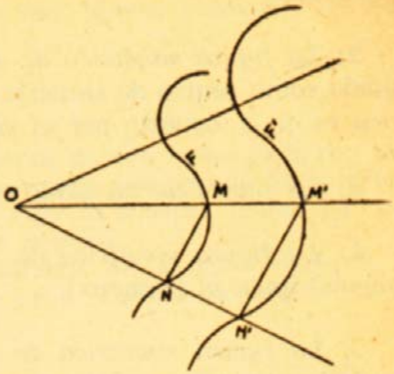
Definición.—*Si se da un punto fijo* **O** *y un número algebraico* **k**, *si a cada punto* **M** *de una figura* **(F)**, *se hace corresponder un punto* **M'** *tal que* $\overrightarrow{OM'} = k \cdot \overrightarrow{OM}$ *se obtiene una nueva figura* **(F')**, *la cual, se dice, es homotética de la figura* **(F)**.

Esta definición supone que: a) *los puntos* **O, M, M'** *están en línea recta* (vectores $\overrightarrow{OM}$ y $\overrightarrow{OM'}$ colineales); b) *la razón entre las distancias* **OM** *y* **OM'** *es constante.*

---

[1] Ver Homotecia en la pág. 287.

El punto **O** es *el centro de homotecia;* el número algebraico **k** es *la razón de homotecia.*



Una homotecia de centro O y de razón k se designa: **homotecia (O, k).**

Si **k>O**, la homotecia es *positiva* M y M' están situados al mismo lado del centro O.

Si **k<O,** la homotecia es *negativa;* M y M' están situados a distintos lados del centro O.

Si **k=1**, la homotecia equivale a la *transformación idéntica;*

Si **k=—1**, la homotecia equivale a *una simetría con respecto al centro O.*

La homotecia no es transformación recíproca sino en el caso de **k=—1**.

El punto **O** es homólogo de sí mismo; *es el único punto doble de la transformación.*

Propiedad fundamental.—*En dos figuras homotéticas, los vectores homólogos son ||s y están en una razón constante.*

Dem.) Sean $\overrightarrow{MN}$ y $\overrightarrow{M'N'}$ dos vectores homólogos de dos figuras F y F' homotéticas de homotecia **(O, k).**

Se tiene: $\overrightarrow{OM'}=k\overrightarrow{ON}$; $\overrightarrow{ON'}=k \cdot \overrightarrow{ON}$

Se puede escribir la relación: $\dfrac{\overline{OM'}}{\overline{OM}} = \dfrac{\overline{ON'}}{\overline{ON}} = k\ldots$

Por consiguiente: M'N' y MN son $\parallel$s por determinar segmentos proporcionales sobre dos rectas secantes y la semejanza de los $\triangle$s OMN y OM'N' permite escribir:

$\dfrac{\overline{M'N'}}{\overline{MN}} = k$:

Luego: $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$

Corolarios.—

1) *La figura homotética de una recta es otra recta.*

2) *La figura homotética de un ángulo es otro ángulo igual.*

3) *La figura homotética de un polígono es un polígono semejante.*

4) *La figura homotética de un plano es un plano* $\parallel$.

5) *La figura homotética de un círculo es otro círculo.*

6) *Las secciones* $\parallel$*s de un* $\sphericalangle$ *poliedro son homotéticas.*

EJERCICIOS DE APLICACION

1. Los vértices A y B de un $\triangle$ABC, de magnitud invariable, resbalan sobre rectas $\parallel$s. Encontrar el L.G. del tercer vértice.

2. Por el punto A, intersección de dos $\odot$s que se cortan, se traza una secante variable y sobre esta secante, a partir de A, se aplican los segmentos AM y AN cuya longitud es igual a la semisuma de las cuerdas interceptadas. Hallar el L.G. de los puntos M y N.

3. Construir un segmento de longitud dada $\parallel$ a una recta de dirección dada y cuyos extremos estén situados sobre dos rectas dadas.

4. Construir un trapezoide dados: b, d, e, f, ε (método de traslación).

5. Se da un $\measuredangle$AOB y un vector $\vec{V}$ de su plano. Construir el vector $\overrightarrow{MN}$ equipolente a V y tal que M se halle sobre OA y N sobre OB.

6. Determinar los elementos de simetría: a) de un cubo; b) de un tetraedro regular; c) de una pirámide recta regular cuadrangular; d) de un octaedro regular.

7. Demuestre que: a) Si una figura admite dos planos de simetría rectangulares dicha figura admite un eje de simetría; b) Si una figura admite tres planos de simetría rectangulares, de dos a dos, admite tres ejes de simetría y un centro de simetría.

8. Se dan dos puntos fijos A y B y én AB otros dos puntos M y N tales que la razón de sus distancias a los puntos A y B sea un número dado k. Demuestre que si la razón de las distancias de A y B a un recta L del espacio es igual a k, la razón de las distancias del pie de la $\perp$ bajada de M a L a los puntos A y B, es también igual a k.

9. Se dan dos $\triangle$s isósceles congruentes ABC y ABD de base común y situados en planos diferentes. Demuestre que las rectas AB y CD son $\perp$s, y que el tetraedro ABCD admite un eje de simetría.

10. Inscribir un cuadrado en un $\triangle$ isósceles de modo que uno de los lados del cuadrado esté situado en la base del Δ y los otros dos vértices se hallen en los lados iguales.

11. Un $\triangle$ABC tiene el vértice A fijo, el vértice B describe una recta L y el lado BC permanece equipolente a un vector fijo $\vec{V}$. Hallar el L. G. del punto medio de los tres lados del Δ ABC.

12. Demuestre que dos $\odot$s tangentes son homotéticas respecto a su punto de contacto.

13. Dos $\odot$s son tangentes en A. La tangente a una de ellas en un punto M, corta a la otra en B y C. Demuestre que la recta AM es bisectriz del $\measuredangle$ BAC.

14. Construir un $\triangle$ dados: α, t_a, t_b.

15. Dados un punto O y una $\odot$ fija C que no pasa por O, trazar un secante AOB tal que $\dfrac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = k$, siendo k un número algebraico dado.

PROBLEMAS DE BACHILLERATO SOLUCIONABLES POR 6º AÑO DE HUMANIDADES

1.—Halle los términos de una proporción sabiendo que la suma de los medios es 5, la suma de los extremos es 7, y la suma de los cuadrados de sus 4 términos es 50. (Temuco, 1956)

2.—Construya las rectas $y = -x + 5$; $x - 3y = -3$; después determine el área del triángulo limitado por ellas y el eje de las abscisas. (Temuco, 1956).

3.—Resuelva:

$$mx = ny = pz$$
$$ax + by + cz = d.$$

(Temuco, 1954)

4.—Construya el gráfico de la relación entre el perímetro de un triángulo equilátero y el lado del triángulo, suponiendo que éste es variable. Temuco, 1954).

5.—La Compañía de Electricidad me cobró por consumo:

Agosto	104 KWH	\$ 265,70
Septiembre	40 KWH	\$ 162.

La cuenta es a base de una cuota fija, más el pago de la energía consumida, más el 8 por ciento de impuesto. ¿Cuánto me cobrarán por los 28 KWH que gasté en Octubre?

Halle la solución por un sistema de ecuaciones o por representación gráfica. Talca, 1953).

6.—Resuelva

$$\frac{1}{x} - \frac{3}{y} = 2$$

$$\frac{1}{x} - \frac{9x}{y^2} = x$$

Talca, 1953).

7.—Resolver:

$$3x^2 + 4xy + 8y^2 = 3$$
$$9x^2 + 6xy + 32y^2 = 10$$

(Santiago, 1955.

8.—En una proporción se tiene que la suma de los medios es 23 y la de los extremos 26. La suma de los cuadrados de los términos es 725.

¿Cuáles son los términos?

(Santiago, 1955).

9.—Al unir el punto P con el origen de un sistema ortogonal de coordenadas, se tiene que la distancia OP = 3 cm y el ángulo que OP forma con OX es igual a 30°. Calcular las coordenadas de los vértices de uno de los cuadrados que pueden construirse sobre OP.

(Santiago, 1955).

10.—Dibuje el gráfico de la función $3x - 2y = 5$ y determine en él un punto tal que la abscisa sea igual a la ordenada.

(Talca, 1955)

11.—Resolver:

$$\left.\begin{aligned} x^4 + y^4 + x^2y^2 &= 481 \\ x^2 + y^2 + xy &= 37 \end{aligned}\right|$$

12.—Represente gráficamente las rectas:

$$x + 2y = 16$$
$$5x - 3y = 14, \text{ y}$$

determine las coordenadas de su punto de intersección.

13.—Resolver:

$$\left.\begin{aligned} 2^{5x} : 2^{y} &= 2^{17} \\ b^{xy} &= b^{12} \end{aligned}\right|$$

¿Qué puede decirse cuando $b = 1$?

14.—Por P (3,4) se traza PX perpendicular a OP.

¿Qué largo tiene PX?, siendo X el punto en que la $\perp$ intercepta al eje de las abscisas.

15.—El número formado por las dos últimas cifras del año en que nació Newton, aumentado en 12, es el doble del número formado por las dos últimas cifras del año de su fallecimiento.

Este último número de 2 cifras, aumentado en 1, da los 2/3 del primer número.

¿En qué año del siglo XVIII nació Newton?

16.—Resolver:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{y+z}{yz} = \dfrac{1}{a} \\[2ex] \dfrac{x+z}{xz} = \dfrac{1}{a^2} \\[2ex] \dfrac{x+y}{xy} = \dfrac{1}{a^3} \end{array}\right|$$

17.—Verifique mediante el cálculo, que el perímetro de un decágono regular inscrito es mayor que el del hexágono regular inscrito en igual circunferencia.

18.—Resuelva:

$$\left.\begin{array}{l} 3x = 11 - 6y - 14z \\ 14y = 35 - 6x - 36z \\ 98z = 113 - 14x - 36y \end{array}\right|$$

19.—Por un punto P intersección de dos circunferencias dadas O_1, O_2, se traza una secante que corta en A_1 y A_2.

20.—El centro M de una ⊙ es (—5, —12). ¿Cuál es su radio, si pasa por el origen? ¿Cuáles son los puntos en que corta a los ejes del sistema ortogonal?

21.—Resolver:

$$\left.\begin{array}{l} ax^2 + by + c = o \\ bx - ay - c = o \end{array}\right|$$

22.—Resolver:

$$\left.\begin{aligned} x\left(1+\frac{x}{y}\right) &= 2 \\ y\left(1+\frac{y}{x}\right) &= 3 \end{aligned}\right|$$

Santiago, 1952.

23.—Determinar el área del trapecio formado por los ejes ortogonales de un sistema de coordenadas y por:

$$\left.\begin{aligned} 3x + 2y &= 6 \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{3} &= \frac{1}{2} \end{aligned}\right|$$

Santiago, 1952.

24.—Resolver:

$$\begin{aligned} x+y &= 5xyz \\ y+x &= 8xyz \\ x+z &= 9xyz \end{aligned}$$

25.—Dos vértices de un triángulo equilátero son $Q(0,0)$ y $P(2,2\sqrt{3})$.

¿Cuáles son las coordenadas del tercer vértice? Discusión.

26.—Resolver:

$$\left.\begin{aligned} x^4+x^2y^2+y^4 &= 91 \\ x^2-xy+y^2 &= 7 \end{aligned}\right|$$

(Talca, 1950)

27.—El centro de un cuadrado es el punto de origen de un sistema ortogonal de coordenadas.

Si un vértice es A(—13, +85) ¿qué coordenadas tienen los otros vértices?

¿Cuánto mide el lado? y ¿cuánto la diagonal?

(Talca, 1950)

28.—Resolver:

$$x+y+pz=a$$
$$x+y+px=b$$
$$x+z+py=c$$

29.—Resuelva:

$$xy+xz=2xyz$$
$$xy+yz=5xyz$$
$$xz+yz=7xyz$$

(Valdivia, 1951).

30.—Resolver:

$$\frac{1}{u}+v=5$$
$$\frac{1}{v}+u=\frac{5}{6}$$

31.—Resolver:

$$1-y^2\left(1-\frac{y^2}{x^2}\right)=0$$
$$y^2-2(x^2-y^2)=0$$

32.—Resolver:

$$\frac{x}{y}=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}$$
$$\frac{y}{z}=\frac{\sqrt{b}+\sqrt{c}}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}$$
$$xyz=a+b+c$$

33.—Un tren recorre cierta distancia a velocidad constante. Si ésta, aumenta en 6 Km por hora, el tiempo empleado para recorrer la distancia disminuye en 4 horas; y si la velocidad disminuye en 6 Km por hora, el tiempo aumenta en 6 horas.

Calcule la distancia y las tres velocidades.

34.—Determine qué valores hay que dar a **m** y **n** en:

$$\begin{aligned} mx + 2ny &= b \\ 5mx - ny &= 2 \end{aligned}$$

Para que $x = 11$
$y = 4$

(Valdivia, 1951)

35.—Se dibujan dos rectas a partir del punto P (1,1) que cortan en los semiejes del primer cuadrante brazos iguales a $1/2$.

¿Cuál es el área del cuadrilátero que se forma?

(Valdivia, 1951).

36.—Determine dos cantidades de las cuales se conoce la suma **a** de sus recíprocos y la suma **b** de sus cuadrados.

(Valparaíso, 1952).

37.—En una circunferencia se inscribe el triángulo equilátero ABC, y en seguida se dibuja el $\sphericalangle BAD = 45°$, siendo D punto de la circunferencia. Desde D se bajan las perpendiculares a los lados del triángulo.

¿Cuánto mide cada una de estas perpendiculares, en función del lado **a** del $\triangle$?

(Valparaíso, 1952).

38.—Resolver:

$$\left.\begin{aligned} \frac{xy}{4y - 3x} &= 20 \\ \frac{yx}{5z - 4y} &= -12 \\ \frac{xz}{2x - 3z} &= 15 \end{aligned}\right|$$

(Valparaíso, 1952).

39.—Resuelva:

$$\frac{x}{y} + \frac{4\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = \frac{33}{4}$$
$$x - y = 5$$

(Punta Arenas, 1952)

40.—Resuelva:

$$x^2 + y^2 - 4x - 4y = -6$$
$$xy + 3x + 3y = 15$$

(Punta Arenas, 1952).

41.—Encontrar 4 números proporcionales entre sí, tales que la suma de los extremos sea 21, la suma de los medios 19, y la suma de los 4 números 442.

42.—Resuelva:

$$\sqrt{x+y} + \sqrt{x-y} = 4$$
$$x^2 - y^2 = 9$$

43.—Resuelva:

$$5x - 2y = 13$$
$$5\sqrt{x} - 3\sqrt{y} = 3$$

44.—Resuelva:

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$$
$$bcx^2 + acy^2 + abz^2 = m^2$$

45.—Encontrar el área del triángulo limitado por el eje de abscisas, la recta $y = 2x$.
y la recta $x = 5$.

46.—La suma, la diferencia y el producto de dos números son entre sí como 5 : 3 : 16.

¿Cuáles son los dos números?

47.—Resolver y representar gráficamente, el siguiente sistema de ecuaciones:

$$x\sqrt{2} - y\sqrt{3} = 1$$
$$x^2 - xy\sqrt{3} = 0$$

48.—En un sistema ortogonal de coordenadas, la unidad elegida es el cm. Un móvil parte del origen, ascendiendo en la recta $y = \frac{1}{2}x$ hasta llegar a $y = -\frac{1}{2}x + 7$ por la cual desciende hasta el eje de las x. ¿Cuánto ha demorado si se ha movido con velocidad uniforme de 3 cm /minuto? ¿A qué distancia del origen termina su movimiento en el eje OX?

49.—Determinar el área del cuadrilátero formado por los dos ejes de coordenadas ortogonales y las rectas $y - x = 3$
$x = 2$

50.—Resolver: $$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= 29 \\ xy - yz - zx &= -14 \\ x + y + z &= 9 \end{aligned}$$

51.—Demuestre que (1,7), (3,0), (3,5), (1,—1) son los vértices de un trapecio. Calcule su mediana y su área.

52.—Resolver:

$$\left.\begin{aligned} x^3 + 8y^3 &= 35 \\ x + 2y &= 5 \end{aligned}\right|$$

53.—Representar gráficamente la relación que existe entre el lado y la diagonal de un cuadrado.

54.—Resolver:
$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{5}{2} \\[2ex] x + y = \dfrac{3}{2} \end{array}\right|$$

55.—Resolver:
$$\left.\begin{array}{l} x + y + xy = 17 \\ 2x + 3y + xy = 29 \end{array}\right|$$

56.—Resolver:
$$\left.\begin{array}{l} y = x^2 + x + 1 \\ 0 = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1 \end{array}\right|$$

(Santiago, 1951).

57.—Resolver:
$$\left.\begin{array}{l} x(y+z) = a \\ y(z+x) = b \\ z(x+y) = c \end{array}\right|$$

58.—Un empleado recibe su sueldo de E° 8.000 el primer día de cada mes; el día 4 paga E° 3.000 de arriendo y el día 9, las cuentas de gas y luz que suman E° 400. Fuera de ello, el gasto diario es de E° 140. Hacer el gráfico del dinero que le resta desde el primer día de cierto mes y por dos meses consecutivos, suponiendo que al recibir el primer sueldo mensual considerado, le quedaban E° 200.

59.—Divida un trapecio en 3 partes equivalentes mediante paralelas a las bases.

(Temuco, 1950).

60.—El desarrollo de un tetraedro regular es un paralelógramo cuyo lado menor mide $\sqrt{5}$[cm] — ¿Cuál es la superficie y el volumen del cuerpo?

(Temuco, 1950)

61.—Un observador situado en Ecuador ve el día 4 de febrero a una hora dada una estrella en el meridiano del lugar.

¿Dónde ve esa misma estrella, desde el mismo lugar y a la misma hora, los días 1.o de mayo y 4 de mayo? ¿Por qué? Si no estuviera en el Ecuador ¿serían iguales las respuestas?

(Talca, 1955)

62.—Dos circunferencias se cortan bajo ángulo recto. Se pide encontrar la distancia de los 2 centros y la magnitud de la cuerda común sabiendo que los radios son respectivamente iguales a 3 cm y 4 cm.

(Santiago, 19555).

63.—La altura de culminación superior de una estrella, en Santiago, es igual a su declinación austral. ¿Cuánto vale esta declinación si en Santiago la declinación es 33° 34'? ¿Es o no estrella circumpolar?

(Santiago, 1955).

64.—El día solar medio es 1,00274; tomando como unidad el día sideral; expresarlo en horas, minutos y segundos.

(Talca, 1950).

65.—Hable de la paralaje y del diámetro aparente.

Señale algunas aplicaciones.

(Valparaíso, 1952).

66.—Diga lo que sepa acerca de los eclipses de luna, e ilustre con dibujos sus explicaciones.

67.—¿Cuál debería ser la velocidad, expresada en [km/h] a que debería viajar un automóvil a lo largo del Ecuador terrestre para que el tiempo no transcurra para él?

¿En qué sentido debería moverse?

68.—¿Cuál es la menor distancia, medida en la superficie terrestre, entre dos puntos de la Tierra pertenecientes al mismo meridiano, cuyas latitudes son $+33^{\circ}$ y -27°?

¿Cuál es la mayor distancia?

$R = 6370{,}26$ [km].

69.—Construir las expresiones:

a) $$\frac{1}{x^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$$

b) $$\frac{x^2}{a^2} = \frac{m}{n}$$

c) $$x = \sqrt{a^2\sqrt{3} - bc\sqrt{2}}$$

70.—La declinación boreal de una estrella es de 45°, y culmina a 50° al norte del cenit.

¿Cuál es la altura del polo sobre el horizonte del lugar de observación?

71.—Hable acerca de los principales movimientos de la tierra.

72.—Calcule el radio del paralelo terrestre en que un grado mide 5.555,5 m.

¿De qué paralelo se trata, aproximadamente?

(Talca, 1956).

73.—¿Cuál es la mayor altura de culminación que alcanza el sol en cualquier ciudad de Chile?

¿Qué días se verifica?

(Santiago, 1952).

74.—En cierto día, el sol pasa por el meridiano del lugar, simultáneamente con una estrella determinada. ¿Qué ocurre al día siguiente? ¿Qué consecuencia acerca del movimiento de la tierra, deriva Ud. de la consecuencia que señala?

75.—¿En qué parte del firmamento están situados y pueden verse los planetas, especialmente Venus?

Explique por qué.

76.—¿Cuáles son las variaciones periódicas de la declinación del sol? Determine la mayor y la menor altura del sol para Santiago, latitud 33° 26' 42" y longitud 73° 1' 44". ¿En qué día del año ocurren esas alturas solares? ¿Hay algún dato de más en el problema?

(Punta Arenas, 1952).

77.— La latitud geográfica de Santiago es 33° 33' 33". Calcular la distancia cenital de una estrella, cuya declinación es 28° 19' 53", en el momento de su culminación en el meridiano de Santiago.

78.—Enuncie y comente la ley de la gravitación universal de Newton. Aplíquela a la determinación del peso de 1 [kg-masa] en la luna y en el sol; compararlo con el que tiene en la tierra, sabiendo que las masas de la luna y del sol, son respectivamente: 1/81 y 333.432 veces la de la tierra; y que los radios de estos cuerpos miden 3/11 y 110 radios terrestres.

79.—Calcular la latitud de un lugar, en el que la sombra de una estaca vertical, en el solsticio de verano y a mediodía verdadero, tiene una longitud de **a** (cm), siendo la estaca de $\mathbf{a}\sqrt{3}$ cm de longitud.

80.—La rueda delantera de un coche da 50 vueltas más que la trasera, cuando el coche recorre 1 kilómetro. La suma de las dos ruedas (⨀s) es 9 m. ¿Cuánto miden sus radios?

81.—Santiago está a 33° 30' s". ¿Cuáles son los ángulos de elevación máxima y mínima que, en Santiago, puede tener el sol a mediodía? ¿Por qué no se indicó en esta cuestión, el número de segundos de la latitud de Santiago?

(Talca, 1953).

82.—¿A qué distancia del Ecuador se encuentra Santiago si su latitud es de —33° 23' 39"? El arco de meridiano correspondiente a 1° es de 111,1 km.

Talca).

83.—Una estrella cuya declinación es 42°, alcanza en su movimiento diurno una altura máxima de 84°. ¿Cuál es la latitud del lugar de observación?

84.—La latitud de un lugar es 40° 50' — se pide calcular las distancias cenitales de una estrella cuya declinación austral es de 70° 10' en los momentos de sus pasos por el meridiano ¿Entre qué límites debe variar la declinación de una estrella para que salga y se ponga a la misma latitud?

85.—Explique las fases lunares.

(Santiago, 1951).

86.—¿Qué consecuencias estima Ud. que afectarían a la vida en la Tierra, si su eje de rotación quedara perpendicular al plano de la eclíptica?

¿Cuáles, en el caso de que dicho eje estuviera situado en el plano de la órbita?

Justifique sus respuestas.

87.—Explique la noche polar.

88.—Relación entre la latitud de un lugar y la altura del polo en ese lugar. Explique con una figura. Explique también qué relación existe entre longitud geográfica y hora de un lugar.

89.—Se da el lado **a** de un cuadrado inscrito en una circunferencia, en la cual está circunscrito otro cuadrado que, a su vez, está inscrito en una segunda circunferencia... y así, sucesivamente.

Calcular el lado del cuarto cuadrado, así obtenido.

90.—Resolver y construir:

$$\frac{a}{b} + x = \frac{\dfrac{c}{d} + x}{d}$$

91.—Se corta una esfera por un plano, de modo que la diferencia de las áreas de los casquetes obtenidos sea equivalente al área de la sección plana. Se pide determinar en función del

R de la esfera, la distancia de la sección al centro O de la esfera.

92.—Hoy día las edades de tres personas están en la razón de 7 : 9 : 10.

¿Cuáles son sus edades, si hace 4 años las de las dos últimas eran como 23 : 26?

93.—Sabiendo que se verifican:

$$a + b = 7$$
$$b + c = 8$$
$$a + c = 9,$$ demostrar que se tiene
$$c = a+1=b+2.$$ Y en seguida resolver el sistema, aprovechando dicha propiedad.

94.—¿Cuál es la razón entre la arista a de un cubo, y el radio R de una esfera, si ambos tienen igual superficie e igual volumen?

95.—Dos capitales suman E° 100.000 y están colocados al 3% y al 4% de interés anual. En dos años, a interés simple, producen en total E° 7.500. Determine los dos capitales.

96.—Dos circunferencia secantes, tienen radios de 3 m y 4 m. Sus centros distan entre sí 5 m. Determine la superficie que resulta si el conjunto gira en 360° en torno de la línea de los centros.

97.—Se dan los trazos: **a**, **b**, **c** y se pide construir:

$$x = \frac{a^2-b^2}{c}\sqrt[4]{1+\sqrt{2}}$$

98.—Se dan los trazos: **a**, **b**, **c** y se pide construir:

$$x = \frac{a^2+b^2}{c}\sqrt{5+\sqrt{7}}$$

99.—Determine el volumen comprendido entre dos esferas tangentes exteriormente y la superficie cónica tangente a ellas, si sus radios miden 2 cm y 1 cm.

100.—Una pirámide recta regular triangular, en que el apotema lateral es igual a la arista basal, se corta por un plano paralelo a la base y que dimidia las aristas laterales; determine la razón entre las superficies totales de los dos cuerpos resultantes.

(Temuco, 1954)

101.—Construya el trazo:

$$x = \frac{m\sqrt{n}+n\sqrt{p}}{\sqrt{n+p}}$$

m, n, p son trazos dados.

(Temuco, 1956)

102.—Demuestre que si un triángulo rectángulo isósceles gira en 360°, en torno a la paralela a la hipotenusa trazada por el vértice del ángulo recto, engendra un volumen igual al de la esfera que tiene a la hipotenusa por diámetro.

(Temuco, 1956)

103.—En una circunferencia de diámetro **2r** se pide inscribir un trapecio de modo que una de sus bases sea diámetro de la circunferencia, y que la suma de los cuadrados de los otros tres lados sea igual a 0,35 r^2.

(Talca, 1955).

104.—Compare los volúmenes, superficie laterales y superficies totales de 2 cilindros, uno de los cuales tiene una circunferencia basal de perímetro **a** y altura **b** y el otro tiene una ⊙ basal de perímetro **b** y su altura es **a**.

(Talca, 1955)

105.—Construir un triángulo, dados:

$a + b$, p, q.

(Santiago, 1955).

106.—Un cuadrado, un triángulo equilátero y una circunferencia tienen igual perímetro.

¿En qué razón están sus áreas?

(Concepción).

107. Construir el trazo:

$$x = \sqrt[3]{a^3 \pm b^3}$$

(Concepción)

108. Dados los trazos a, b, c, construir la expresión:

$$x = \sqrt{a^2 \pm \sqrt{b^4 - c^4}}$$

109. Tres números tienen por suma 57; si el primero se aumenta en 7, el segundo en 5 y el tercero en 3, los números aumentados son entre sí como 3 : 4 : 5. ¿Cuáles son los números?

110. En un tetraedro regular se traza un plano paralelo a una de las bases y equidistante de ella y del vértice opuesto. Calcular en función de la arista a, del tetraedro, las superficies totales de los cuerpos resultantes.

(Santiago, 1956)

111. Resolver:

$$a : b : c = 5 : 6 : 1$$

$$a^{-1} + b^{-1} + c^{-1} = 1$$

(Santiago, 1956)

112. Repartir E° 801,000 entre 4 personas en razón inversa a sus edades que son: 20, 25, 30 y 40 años.

(Talca, 1953)

113. Construya la expresión:

$$t = \sqrt{pq - mn\sqrt{3}}$$

m, n, p, q son trazos dados.

(Talca, 1953)

114. Se da un cuadrado de lado, a. Se pide determinar la superficie del anillo limitado por las $\odot$s inscrita y circunscrita al cuadrado, y la altura que debe tener un tronco de cono recto que tiene por bases los dos círculos, para que su superficie lateral sea equivalente a la del anillo.

(Talca, 1953)

115. Desde un vértice de un cuadrado dado, trace una transversal que lo divida en la razón 1 : 2.

Indice el N° de soluciones. (Temuco, 1964)

116. Una pirámide recta regular triangular en que el apotema lateral es igual a la arista basal, se corta por un plano paralelo a la base y que dimidia las aristas laterales, determine la razón entre las superficies totales de los dos cuerpos resultantes. (Temuco, 1954)

117. ¿Qué forma ofrece la sección central de un cono recto circular cuando su superficie lateral es la sección áurea de su superficie total. (Talca, 1953)

118. Kepler descubrió que los cubos de las distancias de los planetas al sol, son proporcionales a los cuadrados de sus períodos. Sabiendo que la distancia de Venus al sol es 0,7225 de la distancia Tierra-Sol y que la de Marte es 2,1025 de la de Venus, calcule los períodos de Venus y Marte, tomando como unidad, el período de la Tierra. (Talca, 1953)

119. Demuestre que las distancias de un punto, situado en el interior de un pentágono regular, a los lados, es igual a 5 veces el radio de su circunferencia inscrita. Generalice el problema. (Valdivia, 1951)

120. Resuelva:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{x}{y} &= \frac{a^3+a^2+a+1}{a^2+a+1} \\
\frac{y}{z} &= \frac{a^2+a+1}{a+1} \\
\frac{z}{u} &= \frac{a+1}{1} \\
\frac{y}{u} &= \frac{a^2+a+1}{1} \\
x-y+z+u &= \frac{a(a^4-1)}{a+1}
\end{aligned}\right|$$

(Valdivia, 1951)